

CÔNG THỨC LÝ THUYẾT TOÁN THPT
ÔN THI TN THPT TỪ 2025
WORDTOAN.COM (st)

TÀI LIỆU NÀY CỦA:.....

LỚP:.....

....., NGÀY THÁNG NĂM.....

TỔNG HỢP LÝ THUYẾT TOÁN THPT

I. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Hệ thức Cơ bản:

▪ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	▪ $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	▪ $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	▪ $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$
▪ $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	▪ $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	▪ $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \\ \sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha \\ \cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha \end{cases}$	▪ $\begin{cases} \forall k \in \mathbb{Z} \\ \tan(\alpha + k\pi) = \tan \alpha \\ \cot(\alpha + k\pi) = \cot \alpha \end{cases}$

2. Cung Liên kết:

Đối: $\alpha; -\alpha$	Bù: $\alpha; \pi - \alpha$	Phụ: $\alpha; \frac{\pi}{2} - \alpha$	Khác pi: $\alpha; \pi + \alpha$	Khác $\frac{\pi}{2}$: $\alpha; \frac{\pi}{2} + \alpha$
$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha$
$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot \alpha$
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\tan \alpha$
Cos đối	Sin bù	Phụ chéo	Khác Pi: tang, cotang	Khác pi/2: sin bù cos, cos bù sin

3. Công thức Cộng:

$\begin{cases} * \sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b \\ * \sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b \end{cases}$	$\begin{cases} * \cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\ * \cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \end{cases}$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

4. Công thức Nhân đôi, Nhân ba:

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$	$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$ $= 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$	$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$	$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$	$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$

5. Công thức Hạ bậc:

$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$	$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$	$\tan^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$
--	--	---

6. Biến đổi Tổng thành Tích:

$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
---	--

$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$	$\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$
$\tan a + \tan b = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cdot \cos b}$	$\tan a - \tan b = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b}$
$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$	$\sin \alpha - \cos \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right)$

7. Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

II. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nếu $\sin u = m \in [-1; 1]$ và

$$m \notin \left\{ \pm 1; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{1}{2}; 0 \right\} \text{ thì:}$$

$$\sin u = m \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin m + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nếu $\cos u = m \in [-1; 1]$ và $m \notin \left\{ \pm 1; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{1}{2}; 0 \right\}$ thì:

$$\cos u = m \Leftrightarrow u = \pm \arccos m + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nếu $\sin u = m \notin [-1; 1]$ thì: $\sin u = m \Leftrightarrow u \in \emptyset$

Nếu $\cos u = m \notin [-1; 1]$ thì: $\cos u = m \Leftrightarrow u \in \emptyset$

Đặc biệt:
$$\begin{cases} \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \end{cases}$$

Đặc biệt:
$$\begin{cases} \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \\ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nếu $\tan u = m \notin \left\{ \pm \sqrt{3}; \pm 1; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; 0 \right\}$ thì:

$$\tan u = m \Leftrightarrow u = \arctan m + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Nếu $\cot u = m \notin \left\{ \pm \sqrt{3}; \pm 1; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; 0 \right\}$ thì:

$$\cot u = m \Leftrightarrow u = \text{arc cot } m + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

⚡**Lưu ý:** Điều kiện để hàm $\tan u$ có nghĩa là

$u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tuy vậy, phương trình

$\tan u = m$ luôn có nghiệm, vì vậy không cần đặt điều kiện.

⚡**Lưu ý:** Điều kiện để hàm $\cot u$ có nghĩa là

$u \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tuy vậy, phương trình $\cot u = m$ luôn có nghiệm, vì vậy không cần đặt điều kiện cho nó.

Kỹ thuật 1: Làm mất dấu TRỪ

<ul style="list-style-type: none"> ◦ $-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$ ◦ $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$ ◦ $-\tan \alpha = \tan(-\alpha)$ ◦ $-\cot \alpha = \cot(-\alpha)$ 	<p>Ví dụ:</p> $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin x \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(-x)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = -x + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi + x + k2\pi \text{ (vô nghiệm)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$
---	--

Kỹ thuật 2: Biến đổi CHÉO

<ul style="list-style-type: none"> ◦ $\sin \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ◦ $\cos \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ◦ $\tan \alpha = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ◦ $\cot \alpha = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ 	<p>Ví dụ:</p> $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$
--	---

<p>Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ (với $a^2 + b^2 \geq c^2$)</p> $a \sin x + b \cos x = c$ $\Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\Leftrightarrow \sin x \cdot \cos \alpha + \cos x \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\sin 2x = \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - x + k2\pi \\ 2x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + k2\pi \end{cases}$ <p>(với $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)</p> $\Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \sin \beta \Leftrightarrow \dots \text{ với } \sin \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	<p>Phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d$</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Trường hợp 1: Xét $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$. Ta có hệ sau: $\begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ a \sin^2 x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 \\ a = d \end{cases} \Leftrightarrow \dots \dots \dots (1)$ ▪ Trường hợp 2: Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$, ta có: $a \tan^2 x + b \tan x + c = d(1 + \tan^2 x) \Leftrightarrow \dots \dots \dots (2)$ ▪ Hợp nghiệm của (1), (2) ta có tập nghiệm của phương trình đã cho.
--	---

🔗 **Lưu ý:** Phương trình $a \sin x + b \cos x = c$ chỉ có nghiệm khi và chỉ khi $a^2 + b^2 \geq c^2$.

III. TỔ HỢP - XÁC SUẤT

QUY TẮC CỘNG	QUY TẮC NHÂN	
Nếu phép đếm được chia ra hiều trường hợp , ta sẽ cộng các kết quả lại.	Nếu phép đếm được chia ra làm hiều giai đoạn bắt buộc , ta sẽ nhân các kết quả của mỗi giai đoạn ấy.	
HOÁN VỊ	TỔ HỢP	CHỈNH HỢP
▪ Sắp xếp (đổi chỗ) của n phần tử khác nhau, ta có	▪ Chọn k phần tử từ n phần tử (không sắp xếp thứ tự), ta có số	▪ Chọn k phần tử từ n phần tử (có sắp xếp thứ tự), ta được số cách

số cách xếp là $P_n = n!$ với $n \in \mathbb{N}$. <ul style="list-style-type: none"> $n! = 1.2 \dots (n-1)n$. Quy ước số: $0! = 1$. 	cách chọn là C_n^k . <ul style="list-style-type: none"> $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ với $\begin{cases} k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$. 	chọn là A_n^k . <ul style="list-style-type: none"> $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ với $\begin{cases} k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 \leq k \leq n \end{cases}$.
--	---	---

Một số tính chất:	$C_n^k = C_n^{n-k}$	$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$	$A_n^k = k! C_n^k$
XÁC SUẤT	<ul style="list-style-type: none"> Công thức: $P(X) = \frac{n(X)}{n(\Omega)}$ Trong đó: $n(X)$: số phần tử của tập biến cố X ; $n(\Omega)$: số phần tử không gian mẫu; $P(X)$ là xác suất để biến cố X xảy ra với $X \subset \Omega$.	<ul style="list-style-type: none"> Tính chất: $0 \leq P(X) \leq 1$. $P(\emptyset) = 0; P(\Omega) = 1$. $P(X) = 1 - P(\bar{X})$ với \bar{X} là biến cố đối của X. 	
	<ul style="list-style-type: none"> Nếu A, B là hai biến cố xung khắc với nhau thì $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. 	<ul style="list-style-type: none"> Nếu A và B là hai biến cố độc lập với nhau thì $P(A.B) = P(A).P(B)$. 	

IV. KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Khai triển dạng liệt kê: $(với n \in \mathbb{N}^*)$	<ul style="list-style-type: none"> $(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$. Đặc biệt: $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^n x^n$ (*). Hệ quả 1: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ (tức là thay $x=1$ vào (*)). Hệ quả 2: Với n chẵn, chỉ cần thay $x=-1$ vào (*), ta có: $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots - C_n^{n-1} + C_n^n = 0 \Leftrightarrow C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots + C_n^n = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1}$
Khai triển tổng quát: $(với n \in \mathbb{N}^*)$	<ul style="list-style-type: none"> Khai triển: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$. Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ Phân biệt hệ số và số hạng: $C_n^k (-1)^k a^{n-k} b^k \cdot x^\alpha$. Số hạng không chứa x ứng với $\alpha = 0$.

V. CẤP SỐ CỘNG - CẤP SỐ NHÂN

CẤP SỐ CỘNG	CẤP SỐ NHÂN
1. Định nghĩa: <ul style="list-style-type: none"> Dãy số (u_n) được gọi là cấp số cộng khi và chỉ khi $u_{n+1} = u_n + d$ với $n \in \mathbb{N}^*$, d là hằng số. Cấp số cộng như trên có số hạng đầu u_1, công sai d. 2. Số hạng tổng quát: <ul style="list-style-type: none"> $u_n = u_1 + (n-1)d$ với $n \in \mathbb{N}^*$. 3. Tính chất các số hạng: <ul style="list-style-type: none"> $u_{k-1} + u_{k+1} = 2u_k$ với $k \in \mathbb{N}^*$ và $k \geq 2$. 	1. Định nghĩa: <ul style="list-style-type: none"> Dãy số (u_n) được gọi là cấp số nhân khi và chỉ khi $u_{n+1} = u_n \cdot q$ với $n \in \mathbb{N}^*$, q là hằng số. Cấp số nhân như trên có số hạng đầu u_1, công bội q. 2. Số hạng tổng quát: <ul style="list-style-type: none"> $u_n = u_1 \cdot q^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}^*$. 3. Tính chất các số hạng: <ul style="list-style-type: none"> $u_{k-1} \cdot u_{k+1} = u_k^2$ với $k \in \mathbb{N}$ và $k \geq 2$. 4. Tổng n số hạng đầu tiên:

4. Tổng n số hạng đầu tiên:

$$\square S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

$$\square S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q} \text{ với } q \neq 1.$$

VI. GIỚI HẠN DÃY SỐ - HÀM SỐ**1.1. Dãy số có giới hạn 0:**

$$\begin{aligned} \square \lim \frac{1}{n} = 0 & \quad \square \lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 & \quad \square \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0 & \quad \square \lim \frac{1}{n^\alpha} = 0 \\ \square \lim q^n = 0 & \text{ với } |q| < 1. \end{aligned}$$

1.2. Dãy số có giới hạn hữu hạn:Cho $\lim u_n = a$. Ta có:

$$\square \lim |u_n| = |a| \text{ và } \lim \sqrt[3]{u} = \sqrt[3]{a} \quad \square \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \text{ với } a \geq 0.$$

Cho $\lim u_n = a$, $\lim v_n = b$. Ta có:

$$\begin{aligned} \square \lim (u_n \pm v_n) &= a \pm b & \square \lim (u_n \cdot v_n) &= a \cdot b \\ \square \lim \frac{u_n}{v_n} &= \frac{a}{b} \text{ với } b \neq 0 & \square \lim (k \cdot u_n) &= k \cdot a \end{aligned}$$

1.3. Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$\square S = u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \dots = \frac{u_1}{1 - q}.$$

1.4. Dãy số có giới hạn vô cùng:**Quy tắc 1:** Cho $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = \pm\infty$. Tính $\lim (u_n v_n)$.

$\lim u_n$	$\lim v_n$	$\lim (u_n v_n)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Quy tắc 2: Cho $\lim u_n = \pm\infty$, $\lim v_n = a \neq 0$. Tính $\lim (u_n v_n)$.

$\lim u_n$	Dấu của a	$\lim (u_n v_n)$
$+\infty$	$+$	$+\infty$
$+\infty$	$-$	$-\infty$
$-\infty$	$+$	$-\infty$
$-\infty$	$-$	$+\infty$

Quy tắc 3: Cho $\lim u_n = a \neq 0$, $\lim v_n = 0$. Tính $\lim \frac{u_n}{v_n}$.

Dấu của a (tử)	Dấu của v_n (mẫu)	$\lim \frac{u_n}{v_n}$
$+$	$+$	$+\infty$
$+$	$-$	$-\infty$
$-$	$+$	$-\infty$
$-$	$-$	$+\infty$

1. Giới hạn dãy số

2. Giới hạn hàm số:

2.1. Giới hạn tại vô cực:

Cho k dương, ta có:		
$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^k} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty, & k \text{ chẵn} \\ -\infty, & k \text{ lẻ} \end{cases}$

2.2. Giới hạn hữu hạn:

Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$. Ta có:		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a $	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{a}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{a}$ với $a \geq 0$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = a \pm b$	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = a.b$	
$\lim_{x \rightarrow x_0} [k.f(x)] = k.a$ với k là hằng số	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ với b khác 0	

2.3. Quy tắc tìm giới hạn vô cực:

Quy tắc 1: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a \neq 0$. Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$.		
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Dấu của a	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)]$
$+\infty$	+	$+\infty$
$+\infty$	-	$-\infty$
$-\infty$	+	$-\infty$
$-\infty$	-	$+\infty$
Quy tắc 2: Cho $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$. Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.		
Dấu của a	Dấu của $g(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$
+	+	$+\infty$
+	-	$-\infty$
-	+	$-\infty$
-	-	$+\infty$

2.4. Bổ trợ các công thức để khử dạng vô định:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của tam thức bậc hai.	$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + 1)$ $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$
$a + \sqrt{b} = \frac{a^2 - b}{a - \sqrt{b}}$	$a - \sqrt{b} = \frac{a^2 - b}{a + \sqrt{b}}$
$a + \sqrt[3]{b} = \frac{a^3 + b}{a^2 - a\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2}$	$a - \sqrt[3]{b} = \frac{a^3 - b}{a^2 + a\sqrt[3]{b} + (\sqrt[3]{b})^2}$

3. Điều kiện giới hạn và điều kiện liên tục:

3.1. Điều kiện tồn tại giới hạn:

	Giới hạn bên phải	Giới hạn bên trái	Điều kiện để hàm số có giới hạn tại x_0 .
Ký hiệu	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$
Nghĩa là	$\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ x > x_0 \end{cases}$	$\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ x < x_0 \end{cases}$	Khi đó: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$

3.2. Điều kiện liên tục của hàm số:

- Hàm số $f(x)$ liên tục tại

$$x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \Leftrightarrow f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

- Mọi hàm số đa thức, phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác đều liên tục trên tập xác định của chúng.

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ nếu nó liên tục với mọi $x = x_0 \in (a; b)$.

- Hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \text{ liên tục trên } (a; b) \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \end{cases}$

3.3. Điều kiện có nghiệm của phương trình:

Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a; b)$.

VII. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

2. Bảng đạo hàm cơ bản và mở rộng:

<ul style="list-style-type: none"> $k' = 0$ (với k là hằng số) 	<ul style="list-style-type: none"> $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $\xrightarrow{MR} (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$ 	<ul style="list-style-type: none"> $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\xrightarrow{MR} (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ 	<ul style="list-style-type: none"> $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\xrightarrow{MR} \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
<ul style="list-style-type: none"> $(e^x)' = e^x$ $\xrightarrow{MR} (e^u)' = e^u \cdot u'$ 	<ul style="list-style-type: none"> $(a^x)' = a^x \ln a$ $\xrightarrow{MR} (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ 	<ul style="list-style-type: none"> $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\xrightarrow{MR} (\ln u)' = \frac{u'}{u}$ 	<ul style="list-style-type: none"> $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $\xrightarrow{MR} (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$
<ul style="list-style-type: none"> $(\sin x)' = \cos x$ $\xrightarrow{MR} (\sin u)' = u' \cos u$ 	<ul style="list-style-type: none"> $(\cos x)' = -\sin x$ $\xrightarrow{MR} (\cos u)' = -u' \sin u$ 		
<ul style="list-style-type: none"> $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ $\xrightarrow{MR} (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = u' (1 + \tan^2 u)$ 	<ul style="list-style-type: none"> $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$ $\xrightarrow{MR} (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u} = -u' (1 + \cot^2 u)$ 		

3. Quy tắc tìm đạo hàm:

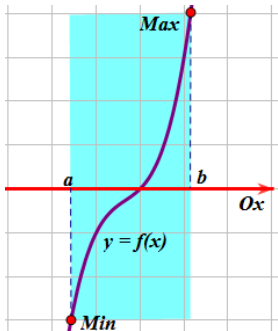
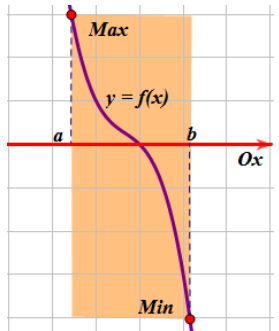
$$\begin{aligned} & \bullet (u \pm v)' = u' \pm v' & \bullet (k.u)' = k.u' & \bullet (u.v)' = u'v + uv' \\ & \bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} & \bullet f'_x = f'_u \cdot u'_x \text{ với} & \begin{cases} f'_x \text{ là đạo hàm của } f \text{ theo biến } x \\ f'_u \text{ là đạo hàm của } f \text{ theo biến } u. \\ u'_x \text{ là đạo hàm của } u \text{ theo biến } x \end{cases} \end{aligned}$$

4. Đạo hàm cấp cao và vi phân:

Đạo hàm cấp cao	Vi phân
$f''(x) = [f'(x)]'$; $f'''(x) = [f''(x)]'$ $f^{(4)}(x) = [f'''(x)]'$; ...; $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$	$df(x) = f'(x).dx$ $dy = y'.dx$ $du = u'.dx$

VIII. KHẢO SÁT HÀM SỐ VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU	HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$	HÀM NHẤT BIẾN $y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0)$						
<ul style="list-style-type: none"> Bước 1: Tìm tập xác định D. Bước 2: Tính $y' = f'(x)$; cho $y' = 0$ <small>Tim nghiệm</small> $\rightarrow x_1, x_2, \dots$ Tìm thêm các giá trị x mà y' không xác định. Bước 3: Lập bảng biến thiên. (Nên chọn giá trị x đại diện cho từng khoảng thay vào y' để tìm dấu của y' trên khoảng đó). Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên để kết luận về sự đồng biến, nghịch biến của hàm số. 	<ul style="list-style-type: none"> Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số đồng biến trên tập xác định $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ Hàm số nghịch biến trên tập xác định $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ <p>⚠ Lưu ý: Nếu a chứa tham số m thì ta xét $a = 0$, tìm m. Thay m tìm được để kiểm tra dấu y', xem y có đơn điệu trên \mathbb{R} không?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Đạo hàm $y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$. Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc > 0$. Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow ad - bc < 0$. <p>⚠ Lưu ý: Nếu đề cho đồng biến (nghịch biến) trên $(\alpha; \beta)$ thì ta xét điều kiện: $-\frac{d}{c} \notin (\alpha; \beta)$.</p>						
ĐIỀU KIỆN CỰC TRỊ	CỰC TRỊ HÀM BẬC BA $y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$	CỰC TRỊ HÀM BẬC BỐN $y = ax^4 + bx^2 + c \quad (a \neq 0)$						
<ul style="list-style-type: none"> Hàm số có điểm cực trị là $(x_0; y_0) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$. (giả thiết là hàm số liên tục tại x_0). Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại $x = x_0$. 	<ul style="list-style-type: none"> Đạo hàm $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Hàm số có hai cực trị (tức là có CĐ-CT) $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_{y'} > 0 \end{cases} (*)$. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu $\Leftrightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow ac < 0$. Hàm số có hai điểm cực trị cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta_{y'} > 0 \\ ac > 0 \end{cases}$. Phương trình đường thẳng đi qua 	<ul style="list-style-type: none"> Đạo hàm $y' = 4ax^3 + 2bx$. Điều kiện cực trị <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Ba cực trị</td> <td>$ab < 0$</td> </tr> <tr> <td>Một cực trị</td> <td>$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$</td> </tr> <tr> <td>Có cực trị</td> <td>$a^2 + b^2 > 0$</td> </tr> </table> Cho A, B, C là ba điểm cực trị, ta có: $\cos BAC = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ 	Ba cực trị	$ab < 0$	Một cực trị	$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$	Có cực trị	$a^2 + b^2 > 0$
Ba cực trị	$ab < 0$							
Một cực trị	$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a^2 + b^2 > 0 \end{cases}$							
Có cực trị	$a^2 + b^2 > 0$							

<p>▪ Nếu $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{cases}$ thì hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = x_0$.</p>	<p>hai điểm cực trị:</p> $y = f(x) - \frac{f'(x) \cdot f''(x)}{18a}$ <p>☞ Lưu ý: Nếu tọa độ hai cực trị đã rõ ràng ta nên gọi đường thẳng $y = ax + b$ rồi thay tọa độ hai điểm đó vào \longrightarrow Giải hệ tìm a, b.</p>	$S_{\Delta ABC} = \sqrt{\frac{b^5}{-32a^3}}$
<p>TÌM MAX-MIN TRÊN ĐOẠN Tìm Max-Min của $f(x)$ trên đoạn $[a; b]$</p>		<p>TÌM MAX-MIN TRÊN KHOẢNG Tìm Max-Min của $f(x)$ trên khoảng $(a; b)$</p>
<p>▪ Bước 1: Tính $y' = f'(x)$. Tìm các nghiệm $x_i \in (a; b)$ khi cho $f'(x) = 0$. Tìm $x_j \in (a; b)$ mà y' không xác định.</p> <p>▪ Bước 2: Tính các giá trị $f(a)$, $f(b)$ và $f(x_i)$, $f(x_j)$ (nếu có).</p> <p>▪ Bước 3: So sánh tất cả giá trị trong bước 2 để kết luận về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.</p>		<p>▪ Bước 1: Tính $y' = f'(x)$. Tìm các nghiệm $x_i \in (a; b)$ khi cho $f'(x) = 0$. Tìm $x_j \in (a; b)$ mà y' không xác định.</p> <p>▪ Bước 2: Cần tính $\lim_{x \rightarrow a^+} y$, $\lim_{x \rightarrow b^-} y$. (Nếu thay $(a; b)$ bằng $(-\infty; +\infty)$ thì ta tính thêm $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y$).</p> <p>▪ Bước 3: Lập bảng biến thiên và suy ra giá trị lớn nhất, nhỏ nhất trên khoảng.</p>
<p>ĐẶC BIỆT</p>	<p>▪ Nếu hàm $f(x)$ đồng biến trên $[a; b]$ thì</p> $\begin{cases} \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(b) \\ \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(a) \end{cases}$ 	<p>▪ Nếu hàm $f(x)$ nghịch biến trên $[a; b]$ thì</p> $\begin{cases} \max_{x \in [a; b]} f(x) = f(a) \\ \min_{x \in [a; b]} f(x) = f(b) \end{cases}$ 
<p>TIỆM CẬN ĐỨNG</p>		<p>TIỆM CẬN NGANG</p>
<p>▪ Định nghĩa: $\begin{cases} x \longrightarrow x_0 \\ y \longrightarrow \pm\infty \end{cases}$ (x hữu hạn, y vô hạn), ta có tiệm cận đứng $x = x_0$. Lưu ý: điều kiện $x \longrightarrow x_0$ có thể được thay bằng $x \longrightarrow x_0^-$ (giới hạn bên trái) hoặc $x \longrightarrow x_0^+$ (giới hạn bên phải).</p> <p>▪ Cách tìm TCD: Nếu $x = x_0$ là một nghiệm của mẫu số mà không phải là nghiệm của tử số thì $x = x_0$ chính là một TCD của đồ thị. (với tập xác định có dạng $D = K \setminus \{x_0; x_1; \dots\}$).</p>		<p>▪ Định nghĩa: $\begin{cases} x \longrightarrow \pm\infty \\ y \longrightarrow y_0 \end{cases}$ (x vô hạn, y hữu hạn), ta có tiệm cận ngang $y = y_0$.</p> <p>▪ Cách tìm TCN: Đơn giản nhất là dùng CASIO</p> <p>Bước 1: Nhập hàm số vào máy.</p> <p>Bước 2: $\boxed{CALC} \xrightarrow{NEXT} \boxed{X = 10 \wedge 10} \xrightarrow{NEXT} \boxed{=}$ $\boxed{CALC} \xrightarrow{NEXT} \boxed{X = -10 \wedge 10} \xrightarrow{NEXT} \boxed{=}$</p> <p>Bước 3: Nếu kết quả thu được là hữu hạn (tức là y_0) thì ta kết luận TCN: $y = y_0$.</p>
<p>▪ Đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ với ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$) có một TCD: $x = -\frac{d}{c}$, một TCN: $y = \frac{a}{c}$.</p>		
<p>☞ Nên nhớ, mỗi đồ thị chỉ có tối đa là 2 tiệm cận ngang.</p>		

SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ
Xét hai đồ thị $(C_1): y = f(x)$ và $(C_2): y = g(x)$.

Phương pháp chung tìm giao điểm hai đồ thị

- | | |
|---|---|
| <p>▪ Bước 1 : Lập phương trình hoành độ giao điểm của (C_1) & (C_2): $f(x) = g(x)$. (*)</p> | <p>▪ Bước 2 : Giải phương trình (*) để tìm các nghiệm x_1, x_2, \dots (nếu có), suy ra y_1, y_2, \dots</p> |
| <p>▪ Điều kiện để (C_1) và (C_2) có n điểm chung là phương trình (*) có n nghiệm khác nhau.</p> | <p>▪ Điều kiện để (C_1) tiếp xúc (C_2) là phương trình (*) có nghiệm kép hoặc hệ sau có nghiệm: $\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases}$</p> |

Tìm tham số để $\begin{cases} (C): y = \frac{ax+b}{cx+d} \\ d: y = \alpha x + \beta \end{cases}$ **cắt nhau tại hai điểm phân biệt**

- | | |
|--|--|
| <p>▪ Bước 1 : Viết phương trình hoành độ giao điểm: $\frac{ax+b}{cx+d} = \alpha x + \beta$, đưa phương trình về dạng $g(x) = Ax^2 + Bx + C = 0$ ($x \neq -\frac{d}{c}$).</p> | <p>▪ Bước 2 : Giải hệ $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g\left(-\frac{d}{c}\right) \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm}} m?$</p> |
|--|--|

Tìm tham số để $\begin{cases} (C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d \\ d: y = \alpha x + \beta \end{cases}$ **cắt nhau tại ba điểm phân biệt**
(Ta chỉ áp dụng cho trường hợp phương trình hoành độ giao điểm có nghiệm đẹp)

- | | |
|--|---|
| <p>▪ Bước 1 : Viết phương trình hoành độ giao điểm: $ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha x + \beta$, đưa phương trình về dạng $(x - x_0) \underbrace{(Ax^2 + Bx + C)}_{g(x)} = 0$.
 (có vận dụng kỹ năng chia Hoocner)</p> | <p>▪ Bước 2 : Giải hệ điều kiện: $\begin{cases} A \neq 0 \\ \Delta_g > 0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Tìm}} m?$</p> |
| <p>👉 Lưu ý : Để tìm nghiệm đẹp $x = x_0$, ta nhập vào máy chức năng giải phương trình bậc ba với $m = 100$.</p> | |

PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

DẠNG 1 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ tại điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$	DẠNG 2 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến có hệ số góc k .	DẠNG 3 Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = f(x)$ biết tiếp tuyến đi qua $A(x_A; y_A)$.
<p>▪ Bước 1: Tính đạo hàm y', từ đó có hệ số góc $k = y'(x_0)$.</p> <p>▪ Bước 2 : Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị dạng $y = k(x - x_0) + y_0$.</p>	<p>▪ Bước 1: Gọi $M(x_0; y_0)$ là tiếp điểm và tính đạo hàm y'.</p> <p>▪ Bước 2: Cho $y'(x_0) = k$, tìm được tiếp điểm $(x_0; y_0)$.</p> <p>▪ Bước 3: Phương trình tiếp tuyến: $y = k(x - x_0) + y_0$.</p>	<p>▪ Bước 1: Tiếp tuyến có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ (*) với $y_0 = f(x_0)$.</p> <p>▪ Bước 2: Thay tọa độ điểm A vào (*) để tìm được x_0.</p> <p>▪ Bước 3: Thay x_0 vào (*) để viết phương trình tiếp tuyến.</p>

👉 **Đặc biệt :** Nếu tiếp tuyến song song đường thẳng $y = ax + b$ thì nó có hệ số góc $k = a$, nếu tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $y = ax + b$ thì nó có hệ số góc $k = -\frac{1}{a}$ ($a \neq 0$); nếu tiếp tuyến tạo với Ox góc α thì nó có hệ số góc $k = \pm \tan \alpha$.

ĐIỂM ĐẶC BIỆT THUỘC ĐỒ THỊ

Tâm đối xứng (hay điểm uốn) của đồ thị bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

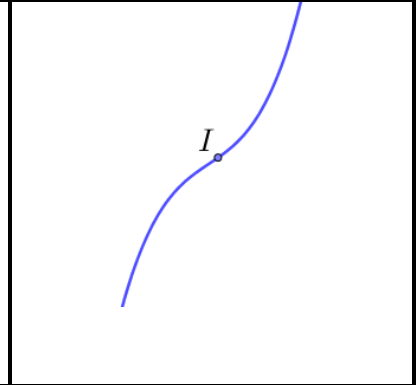
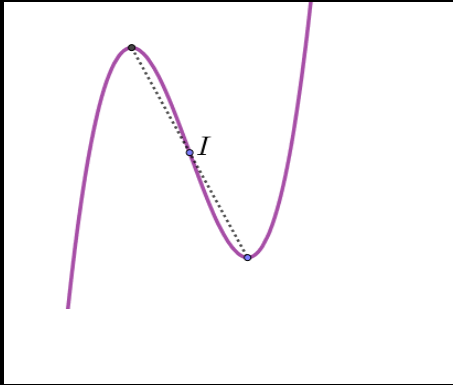
▪ **Bước 1:** Tính $\begin{cases} y' = 3ax^2 + 2bx + c \\ y'' = 6ax + 2b \end{cases}$

▪ **Bước 2:** Cho

$y'' = 0 \xrightarrow{\text{Tim nghiến}} x_0 = -\frac{b}{3a} \Rightarrow y_0$. Ta có tâm

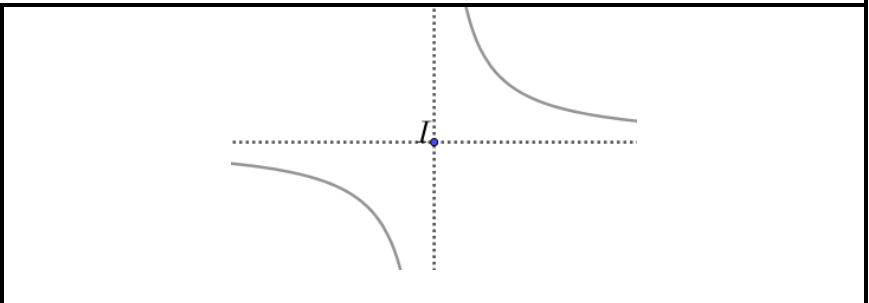
đối xứng (tức điểm uốn): $I(x_0; y_0)$.

☞ **Cần nhớ:** Tâm đối xứng của đồ thị bậc ba cũng là trung điểm của hai điểm cực trị (nếu có).



Tâm đối xứng của đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

▪ Tìm tiệm cận đứng $x = -\frac{d}{c}$ và tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$, suy ra được tâm đối xứng của đồ thị là: $I\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ (là giao điểm 2 tiệm cận tìm được).



Điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm nhất biến $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

Cách 1: Tự luận

▪ **Bước 1:** Chia đa thức cho đa thức, ta viết lại hàm số $y = \alpha + \frac{\beta}{cx+d}$.

▪ **Bước 2:** Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow cx+d$ là ước số nguyên của $\beta \xrightarrow{\text{Tim nhòc}} \begin{cases} x = \\ x = \\ \dots \end{cases}$, suy ra các giá trị y tương ứng. Từ đây tìm được các điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị.

Cách 2: Trắc nghiệm

Thực hiện trên máy tính bỏ túi như sau:

$[MODE] \rightarrow [7] \rightarrow F(X) = \frac{aX+b}{cX+d} \rightarrow [START: -19]$

$\rightarrow [END: -1] \rightarrow [STEP: 1]$. Ta dò tìm những hàng có $F(X)$

nguyên thì nhận làm điểm cần tìm. Làm tương tự khi cho

$[START: 0] \rightarrow [END: 18] \rightarrow [STEP: 1]$, ta sẽ bổ sung thêm

các điểm nguyên còn lại. **Lưu ý:** Học sinh muốn đạt được tính chính xác cao hơn thì có thể dò trên nhiều khoảng, mỗi khoảng $START$ và END cách nhau 19 đơn vị. (Máy tính đời mới sẽ có bộ nhớ lớn hơn).

NHẬN DIỆN ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Hàm số bậc ba

$\rightarrow y' = 3ax^2 + 2bx + c$
A B C

Hệ số	Dấu hiệu đồ thị	Kết luận
a	Nhánh phải đồ thị đi lên	$a > 0$
	Nhánh phải đồ thị đi xuống	$a < 0$
d	Giao điểm với Oy nằm trên điểm O	$d > 0$
	Giao điểm với Oy nằm dưới điểm O	$d < 0$
	Giao điểm với Oy trùng với điểm O	$d = 0$

b, c	Đồ thị không có điểm cực trị nào	$\Delta'_{y'} = (B')^2 - AC = b^2 - 3ac \leq 0$
	Đồ thị có hai điểm cực trị	$\Delta'_{y'} = (B')^2 - AC = b^2 - 3ac > 0$
	Tâm đối xứng nằm bên phải Oy	$-\frac{B}{A} > 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{3a} > 0 \Leftrightarrow ab < 0$
	Tâm đối xứng nằm bên trái Oy	$-\frac{B}{A} < 0 \Leftrightarrow -\frac{2b}{3a} < 0 \Leftrightarrow ab > 0.$
	Hai điểm cực trị nằm cùng phía Ox	$x_1 x_2 > 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A} > 0 \Leftrightarrow \frac{c}{3a} > 0 \Leftrightarrow ac > 0$
	Hai điểm cực trị nằm khác phía Ox	$x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow \frac{C}{A} < 0 \Leftrightarrow \frac{c}{3a} < 0 \Leftrightarrow ac < 0$

☞ Chú ý: Đôi khi, ta thấy đồ thị đi qua điểm $(x_0; y_0)$ cho trước, ta thay tọa độ này vào hàm số để có 1 phương trình. Điều này đúng cho mọi hàm số.

2. Hàm số bậc bốn trùng phương

$$\longrightarrow y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b)$$

Hệ số	Dấu hiệu đồ thị	Kết luận
a	Nhánh phải đồ thị đi lên	$a > 0$
	Nhánh phải đồ thị đi xuống	$a < 0$
c	Giao điểm với Oy nằm trên điểm O	$c > 0$
	Giao điểm với Oy nằm dưới điểm O	$c < 0$
	Giao điểm với Oy trùng với điểm O	$c = 0$
b	Đồ thị hàm số có ba cực trị	$ab < 0$
	Đồ thị hàm số có một cực trị	$ab \geq 0, (a \neq 0)$

3. Hàm số nhất biến

$$\longrightarrow y' = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

Hệ số	Dấu hiệu đồ thị	Kết luận
c và d	Tiệm cận đứng nằm bên phải Oy	$-\frac{d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$
	Tiệm cận đứng nằm bên trái Oy	$-\frac{d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0$
a và c	Tiệm cận ngang nằm phía trên Ox	$\frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$
	Tiệm cận ngang nằm phía dưới Ox	$\frac{a}{c} < 0 \Rightarrow ac < 0$
a và b	Giao điểm của đồ thị với Ox nằm bên phải gốc O	$-\frac{b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0$
	Giao điểm của đồ thị với Ox nằm bên trái gốc O	$-\frac{b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$
b	Đồ thị đi qua gốc O(0;0)	$b = 0$

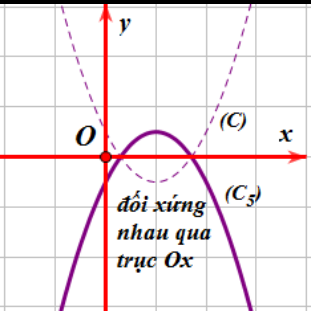
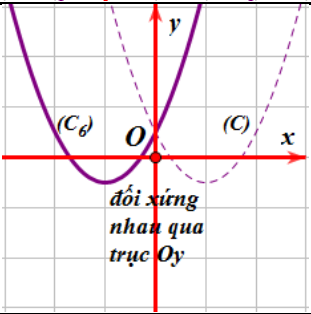
b và d	Giao điểm của đồ thị với Oy nằm trên gốc O	$\frac{b}{d} > 0 \Rightarrow bd > 0$
	Giao điểm của đồ thị với Oy nằm dưới gốc O	$\frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$
a, b, c, d	Mỗi nhánh đồ thị đi lên (từ trái sang phải)	$ad - bc > 0$
	Mỗi nhánh đồ thị đi xuống (từ trái sang phải)	$ad - bc < 0$

PHÉP SUY ĐỒ THỊ TỪ ĐỒ THỊ CÓ SẴN

1. Phép tịnh tiến và đối xứng đồ thị

Cho hàm $y = f(x)$ có đồ thị (C)

Đồ thị cần tìm	Cách biến đổi	Minh họa
$(C_1): y = f(x) + a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy lên phía trên a đơn vị.	
$(C_2): y = f(x) - a$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Oy xuống phía dưới a đơn vị.	
$(C_3): y = f(x+a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua trái a đơn vị.	
$(C_4): y = f(x-a)$	Tịnh tiến đồ thị (C) theo phương Ox qua phải a đơn vị.	

$(C_5): y = -f(x)$	Lấy đối xứng (C) qua Ox .	
$(C_6): y = f(-x)$	Lấy đối xứng (C) qua Oy .	

2. Đồ thị hàm chứa giá trị tuyệt đối

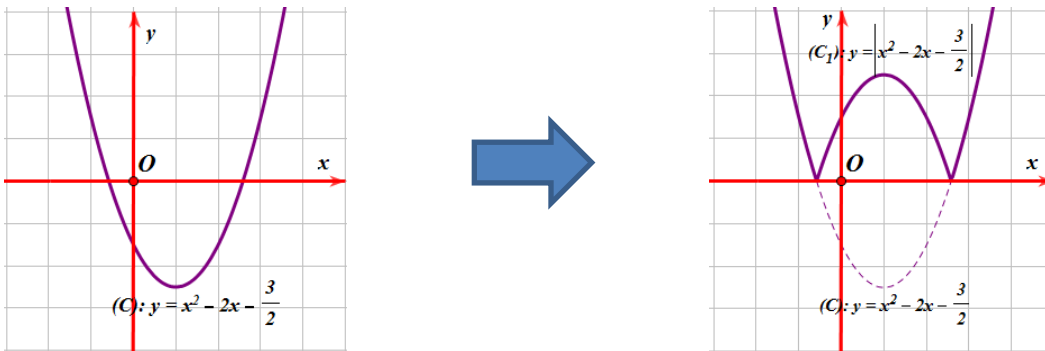
a) Từ đồ thị $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$.

$$\text{Ta có } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{neá } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{neá } f(x) < 0 \end{cases}$$

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía trên Ox , ta được (C') .

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía dưới Ox qua Ox , ta được (C'') .

Kết luận: Đồ thị $(C_1): y = |f(x)|$ là hợp của (C') với (C'') . Xem **ví dụ minh họa** sau:



b) Từ đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$ ta suy ra đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$.

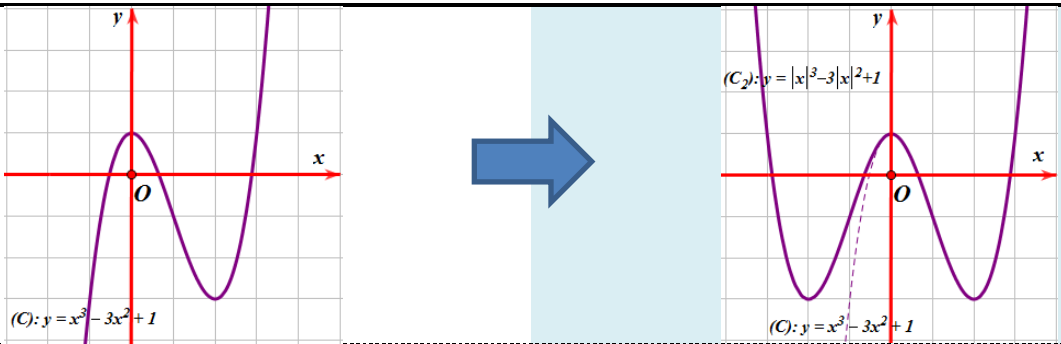
$$\text{Ta có } y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{neá } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{neá } x < 0 \end{cases}$$

Bước 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm bên phải trục Oy , ta được (C') .

Bước 2: Lấy đối xứng phần đồ thị (C') qua trục Oy , ta được (C'') .

(Đây là tính chất đối xứng của đồ thị hàm số chẵn)

Kết luận: Đồ thị $(C_2): y = f(|x|)$ là hợp của (C') với (C'') . Xem **ví dụ minh họa** sau:



CÔNG THỨC BỔ TRỢ CHO QUÁ TRÌNH GIẢI TOÁN HÀM SỐ

Bổ trợ về tam thức bậc hai

Cho phương trình

▪ (*) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$

▪ (*) có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c < 0$.

☞ Định lí Vi-ét : $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \xrightarrow{\text{Áp dụng}} x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P; x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3SP; (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P;$

$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{S^2 - 4P}$. Trong trắc nghiệm, ta nên dùng công thức : $|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

▪ (*) có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S > 0, P > 0 \end{cases}$

▪ (*) có hai nghiệm âm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \Delta > 0 \\ S < 0, P > 0 \end{cases}$

Bổ trợ hình học giải tích phẳng

▪ Nếu ΔABC có $\begin{cases} \overline{AB} = (b_1; b_2) \\ \overline{AC} = (c_1; c_2) \end{cases}$ thì $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |b_1 c_2 - b_2 c_1|$

▪ $\Delta ABC \perp$ tại $A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$.

▪ $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

▪ Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M)$ đến $\Delta : ax + by + c = 0$ là $d(M; \Delta) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

▪ Đặc biệt: $d(M; Ox) = |y_M|, d(M; Oy) = |x_M|$.

IX. LŨY THỪA - MŨ VÀ LOGARIT

1. Công thức lũy thừa

Cho các số dương a, b và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:

▪ $a^0 = 1$	▪ $\underbrace{a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số}}$ với $n \in \mathbb{N}^*$	▪ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
▪ $(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m$	▪ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	▪ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
▪ $a^n b^n = (ab)^n$	▪ $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$	▪ $\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}} \begin{cases} * \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \\ * \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} \end{cases} (m, n \in \mathbb{N}^*)$

2. Công thức logarit:

Cho các số $a, b > 0$, $a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$. Ta có:

▪ $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$	▪ $\lg b = \log b = \log_{10} b$	▪ $\ln b = \log_e b$
▪ $\log_a 1 = 0$	▪ $\log_a a = 1$	▪ $\log_a a^n = n$
▪ $\log_{a^m} b = \frac{1}{m} \log_a b$	▪ $\log_a b^n = n \log_a b$	▪ $\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$
▪ $\log_a (bc) = \log_a b + \log_a c$	▪ $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$	▪ $\begin{cases} a^{\log_a b} = b \\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \end{cases}$
▪ $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, (b \neq 1)$	▪ $\frac{\log_a c}{\log_a b} = \log_b c, (b \neq 1)$	▪ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, (b \neq 1)$

BÀI TOÁN NGÂN HÀNG

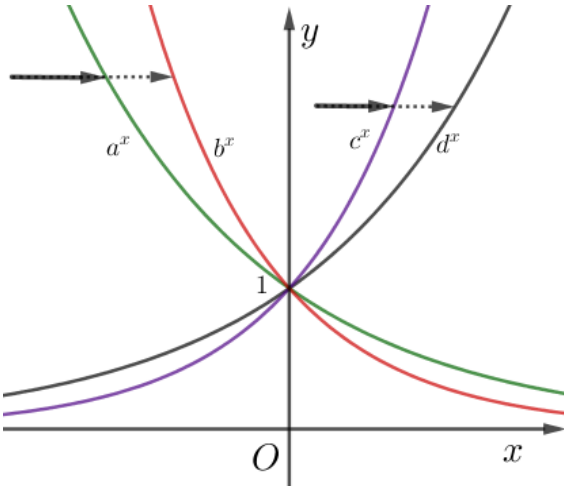
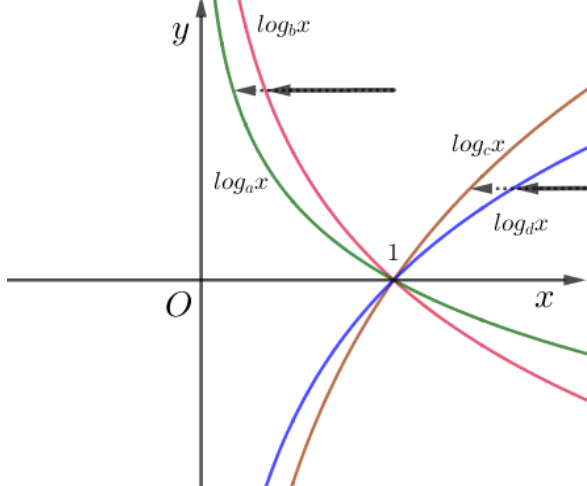
1. Công thức tính lãi đơn	Nếu ta gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức tiền lãi chỉ được tính dựa vào tiền gốc ban đầu (tức là tiền lãi của kỳ hạn trước không gộp vào vốn để tính lãi cho kỳ hạn kế tiếp), đây gọi là hình thức lãi đơn . Ta có: $T = A(1 + nr)$ với A : tiền gửi ban đầu; r : lãi suất; n : kỳ hạn gửi; T : tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n . Lưu ý: r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A , muốn tính số tiền lời ta lấy $T - A$.
2. Công thức lãi kép	Nếu ta gửi tiền vào ngân hàng theo hình thức: hàng tháng tiền lãi phát sinh sẽ được cộng vào tiền gốc cũ để tạo ra tiền gốc mới và cứ tính tiếp như thế, đây gọi là hình thức lãi kép . Ta có: $T = A(1 + r)^n$ với A : tiền gửi ban đầu; r : lãi suất; n : kỳ hạn gửi; T : tổng số tiền nhận sau kỳ hạn n . Lưu ý: r và n phải khớp đơn vị; T bao gồm cả A , muốn tính số tiền lời ta lấy $T - A$.
3. Mỗi tháng gửi đúng số tiền giống nhau theo hình thức lãi kép	Nếu đầu mỗi tháng khách hàng luôn gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi kép $r\%$ /tháng thì số tiền họ nhận được cả vốn lẫn lãi sau n tháng là: $T = \frac{A}{r} [(1 + r)^n - 1] (1 + r)$.
4. Gửi tiền vào ngân hàng rồi rút ra hàng tháng số tiền cố định	Nếu khách hàng gửi vào ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Vào ngày ngân hàng tính lãi mỗi tháng thì rút ra X đồng. Số tiền thu được sau n tháng là: $T = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$
5. Vay vốn và trả góp (trương tự bài toán 4)	Nếu khách hàng vay ngân hàng số tiền A đồng với lãi suất $r\%$ /tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ cách nhau đúng một tháng, mỗi lần hoàn nợ đúng số tiền X đồng. Số tiền khách hàng còn nợ sau n tháng là: $T = A(1 + r)^n - X \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$

3. Hàm số lũy thừa, mũ và logarit:

HÀM LŨY THỪA	HÀM SỐ MŨ	HÀM SỐ LOGARIT
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dạng: $\begin{cases} y = x^\alpha \\ y = u^\alpha \end{cases}$ với u là đa thức đại số. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dạng: $\begin{cases} y = a^x \\ y = a^u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$. ▪ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. ▪ Đạo hàm: 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Dạng: $\begin{cases} y = \log_a x \\ y = \log_a u \end{cases}$ với $\begin{cases} a > 0 \\ a \neq 1 \end{cases}$. ▪ Đặc biệt: $a = e \longrightarrow y = \ln x$; $a = 10 \longrightarrow y = \log x = \lg x$. ▪ Điều kiện xác định: $u > 0$.

<p>▪ Tập xác định:</p> <p>Nếu $\alpha \in \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{\text{NK}} u \in \mathbb{R}$.</p> <p>Nếu $\begin{cases} \alpha \in \mathbb{Z}^- \\ \alpha = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{NK}} u \neq 0$.</p> <p>Nếu $\alpha \notin \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{NK}} u > 0$.</p> <p>▪ Đạo hàm:</p> $\begin{cases} y = x^\alpha \longrightarrow y' = \alpha x^{\alpha-1} \\ y = u^\alpha \longrightarrow y' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \end{cases}$	$\begin{cases} y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a \\ y = a^u \longrightarrow y' = a^u \ln a \cdot u' \end{cases}$ <p>Đặc biệt: $\begin{cases} (e^x)' = e^x \\ (e^u)' = e^u \cdot u' \end{cases}$ với $e \approx 2,71828\dots$</p> <p>▪ Sự biến thiên: $y = a^x$.</p> <p>Nếu $a > 1$ thì hàm đồng biến trên \mathbb{R}. Nếu $0 < a < 1$ thì hàm nghịch biến trên \mathbb{R}.</p>	<p>▪ Đạo hàm:</p> $\begin{cases} y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a} \\ y = \log_a u \longrightarrow y' = \frac{u'}{u \ln a} \end{cases}$ <p>Đặc biệt: $\begin{cases} (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\ln u)' = \frac{u'}{u} \end{cases}$</p> <p>▪ Sự biến thiên: $y = \log_a x$. Nếu $a > 1$: hàm đồng biến trên $(0; +\infty)$. Nếu $0 < a < 1$: hàm nghịch biến trên $(0; +\infty)$.</p>
---	---	--

4. Đồ thị hàm số mũ và logarit:

ĐỒ THỊ HÀM SỐ MŨ	ĐỒ THỊ HÀM SỐ LOGARIT
 <ul style="list-style-type: none"> ▪ Ta thấy: $a^x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $b^x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. ▪ Ta thấy: $c^x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $d^x \uparrow \Rightarrow d > 1$. ▪ So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng a^x trước nên $a > b$. ▪ So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ trái sang phải, trúng c^x trước nên $c > d$. ▪ Vậy $0 < b < a < 1 < d < c$. 	 <ul style="list-style-type: none"> ▪ Ta thấy: $\log_a x \downarrow \Rightarrow 0 < a < 1$; $\log_b x \downarrow \Rightarrow 0 < b < 1$. ▪ Ta thấy: $\log_c x \uparrow \Rightarrow c > 1$; $\log_d x \uparrow \Rightarrow d > 1$. ▪ So sánh a với b: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_b x$ trước: $b > a$. ▪ So sánh c với d: Đứng trên cao, bắn mũi tên từ phải sang trái, trúng $\log_d x$ trước: $d > c$. ▪ Vậy $0 < a < b < 1 < c < d$.

5. Phương trình mũ và logarit:

Phương trình mũ	Phương trình Logarit
<p>1. Dạng cơ bản: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$</p>	<p>1. Dạng cơ bản:</p>

<p>2. Dạng logarit hóa:</p> $\begin{cases} a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b \\ a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x) \cdot \log_a b \end{cases} \quad (a, b > 0, a \neq 1)$ <p>3. Dạng đặt ẩn phụ:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Đặt $t = a^{f(x)} > 0$ ■ Đưa phương trình đã cho về bậc n theo $t \longrightarrow$ giải tìm t. ■ Với t có được, thay vào $t = a^{f(x)}$ để tìm x. <p>a) Phương trình $m.a^{2f(x)} + n.a^{f(x)} + p = 0$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = a^{f(x)} > 0$. • PT: $mt^2 + nt + p = 0$. <p>b) Phương trình $m.a^{g(x)} + n.b^{g(x)} + p.c^{g(x)} = 0$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nhận dạng: $ma^{2f(x)} + n(ab)^{f(x)} + p.b^{2f(x)} = 0$ • Chia hai vế PT cho $b^{2f(x)} \neq 0$, ta được $m\left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)} + n\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} + p = 0 \cdot \text{(Xem a)}$ <p>Chú ý: Ta có thể chia PT cho bất kỳ hàm mũ nào trong ba hàm $\{a^{g(x)}; b^{g(x)}; c^{g(x)}\}$, kết quả không thay đổi.</p> <p>c) Phương trình $m.(a + \sqrt{b})^{f(x)} + n.(a - \sqrt{b})^{f(x)} = p$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Nhận dạng: $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b = 1$ • Đặt $t = (a + \sqrt{b})^{f(x)}, t > 0 \Rightarrow \frac{1}{t} = (a - \sqrt{b})^{f(x)}$ • PT: $mt + \frac{n}{t} = p \Leftrightarrow mt^2 - pt + n = 0$ 	<p style="text-align: center;">$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x) > 0$</p> <p>2. Dạng mũ hóa: $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$ (không cần điều kiện)</p> <p>3. Dạng đặt ẩn phụ:</p> <ul style="list-style-type: none"> ■ Đặt $t = \log_a f(x)$ ■ Đưa pt đã cho về bậc n theo $t \longrightarrow$ giải tìm t. ■ Có t, thay vào $t = \log_a f(x)$ để tìm x. <p>a) Phương trình $m \log_a^2 f(x) + n \log_a f(x) + p = 0$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = \log_a f(x)$ • PT: $mt^2 + nt + p = 0$ <p>b) Phương trình $m \cdot \log_a f(x) + n \cdot \log_{f(x)} a + p = 0$</p> <ul style="list-style-type: none"> • ĐK: $f(x) > 0, f(x) \neq 1$ • Đặt $t = \log_a f(x) \Rightarrow \frac{1}{t} = \log_{f(x)} a$ • PT: $mt + \frac{n}{t} + p = 0 \Leftrightarrow mt^2 + pt + n = 0$ <p>c) Phương trình đơn giản chứa $\begin{cases} \log_a f(x) \\ \log_b g(x) \end{cases}$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = \log_a f(x) \Leftrightarrow f(x) = a^t$ • Thay trở lại phương trình, ta có một phương trình mới đơn giản hơn (chứa ít logarit hơn).
--	---

6. Bất phương trình mũ và logarit:

Bất Phương trình mũ	Bất Phương trình Logarit
<ul style="list-style-type: none"> ■ Dạng cơ bản: $\begin{cases} * a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) \\ * a^{f(x)} \geq a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \end{cases}$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ Dạng cơ bản: $\begin{cases} * \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) \geq g(x) > 0 \\ * \log_a f(x) \geq \log_a g(x) \Leftrightarrow 0 < f(x) \leq g(x) \end{cases}$

☞ Lưu ý: Cách nhận dạng bất phương trình mũ-logarit cũng giống với cách nhận dạng phương trình mũ-logarit. Học sinh tham khảo kỹ mục 5 để có phương pháp giải bất phương trình một cách hiệu quả.

X. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

1. Công thức nguyên hàm:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

<ul style="list-style-type: none"> ■ $\int k \cdot f(x)dx = k \int f(x)dx$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ $\int f'(x)dx = f(x) + C$
--	---	--

<ul style="list-style-type: none"> 1) $\int kdx = kx + C$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ $\int 2dx = 2x + C$ 	<ul style="list-style-type: none"> ■ $\int (-3)dx = -3x + C$
---	--	--

<p>2) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int (ax+b)^\alpha dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$</p>	<p>▪ $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$</p>	<p>▪ $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3/2} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$</p> <p>▪ $\int (1-2x)^{10} dx = \frac{1}{-2} \cdot \frac{(1-2x)^{11}}{11} + C = \frac{(1-2x)^{11}}{-22} + C$</p>
<p>3) $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C \xrightarrow{MR} \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{1}{1-3x} dx = \frac{1}{-3} \ln 1-3x + C$</p>	
<p>4) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C \xrightarrow{MR} \int \frac{1}{(ax+b)^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{-1}{ax+b} + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{1}{(2x-3)^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2x-3} + C = -\frac{1}{4x-6} + C$</p>	
<p>▪ $\int \left(x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 10\right) dx = \frac{x^3}{3} + \ln x - \frac{1}{x} - 10x + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{x^5+1}{x} dx = \int \left(x^4 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^5}{5} + \ln x + C$</p>	
<p>5) $\int e^x dx = e^x + C \xrightarrow{MR} \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$</p>	<p>▪ $\int e^{-x} dx = \frac{1}{-1} e^{-x} + C = -e^{-x} + C$</p>	
<p>6) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int a^{bx+c} dx = \frac{1}{b} \cdot \frac{a^{bx+c}}{\ln a} + C$</p>	<p>▪ $\int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$</p>	<p>▪ $\int 3^{2x} dx = \int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$</p>
<p>▪ $\int 3^{2x+5} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2x+5}}{\ln 3} + C = \frac{3^{2x+5}}{2 \ln 3} + C$</p>		
<p>▪ $\int (e^{x-1} - 2)e^x dx = \int (e^{2x-1} - 2e^x) dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} - 2e^x + C$</p>		<p>▪ $\int 2^x \cdot 3^{x-1} dx = \int 2^x \cdot 3^x \cdot \frac{1}{3} dx = \frac{1}{3} \int 6^x dx = \frac{6^x}{3 \ln 6} + C$</p>
<p>7) $\int \sin x dx = -\cos x + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$</p>	<p>▪ $\int \sin\left(\underbrace{4x - \frac{\pi}{2}}_{a=4; b=-\frac{\pi}{2}}\right) dx = -\frac{1}{4} \cos\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + C$</p>	
<p>8) $\int \cos x dx = \sin x + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$</p>	<p>▪ $\int \cos\left(\underbrace{\frac{\pi}{3} - x}_{a=-1; b=\frac{\pi}{3}}\right) dx = \frac{1}{-1} \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + C$</p>	
<p>▪ $\int (3 \sin x - 2 \cos x) dx = -3 \cos x - 2 \sin x + C$</p>	<p>▪ $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 - \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x\right) + C$</p>	
<p>9) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int [1 + \tan^2(ax+b)] dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{1-2 \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 2\right) dx = \tan x - 2x + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{1}{\cos^2 3x} dx = \frac{1}{3} \tan 3x + C$</p>
<p>▪ $\int \left[1 + \tan^2\left(\underbrace{\pi - 2x}_{a=-2; b=\pi}\right)\right] dx = \frac{1}{-2} \tan(\pi - 2x) + C$</p>		
<p>10) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + \cot^2 x) dx = -\cot x + C$</p> <p>$\xrightarrow{MR} \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{x \sin^2 x + 1}{\sin^2 x} dx = \int \left(x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \cot x + C$</p>	<p>▪ $\int \frac{1}{\sin^2 8x} dx = -\frac{1}{8} \cot 8x + C$</p>

$$\xrightarrow{MR} \int [1 + \cot^2(ax+b)] dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C \quad \square \int (1 + \cot^2 3x) dx = -\frac{1}{3} \cot 3x + C$$

$$\square \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \tan x - \cot x + C$$

2. Tích phân

a) **Định nghĩa:** $\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ với $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên $[a; b]$.

b) **Tính chất:**

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (k \text{ là hằng số})$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du$$

Nếu $f(x) \geq 0, \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

Nếu $f(x) \geq g(x), \forall x \in [a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

☞ **Đặc biệt:**

- Nếu hàm $y = f(x)$ là **hàm số lẻ** trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.
- Nếu hàm $y = f(x)$ là **hàm số chẵn** trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

2. Phương pháp tích phân:

a) **Phương pháp tích phân từng phần:**

Quy tắc chung: $I = \int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$. Ta xét các dạng phổ biến sau:

❖ **Dạng** $\int_a^b P(x) \cdot Q(x) \cdot dx$ với
 $P(x)$ là **đa thức đại số**, $Q(x)$
 là **hàm lượng giác hoặc hàm**
mũ.

$$\xrightarrow{PP} \begin{cases} u = P(x) \\ dv = Q(x) dx \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} du = P'(x) dx \\ v = \int Q(x) dx \end{cases}$$

Minh họa:

$$\square I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1) \sin x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = 2x-1 \\ dv = \sin x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 2 dx \\ v = \int \sin x dx = \underbrace{-\cos x}_{\text{chọn } C=0} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } I = \int_a^b u \cdot dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

$$= -(2x-1) \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx = \dots$$

<p>☞ Lưu ý: $v = \int Q(x)dx$ nên kết quả có dạng $R(x)+C$, ta chủ động chọn 1 giá trị C có lợi cho tính toán sau này.</p>	<p>▪ $J = \int_0^1 (1-x)e^{2x} dx.$</p> <p>Đặt $\begin{cases} u = 1-x \\ dv = e^{2x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -dx \\ v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}.$ <small>chọn $C=0$</small></p> <p>$J = \frac{1}{2}(1-x)e^{2x} \Big _0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x} dx = \dots$</p>
<p>❖ Dạng $\int_a^b P(x).Q(x).dx$ với $P(x)$ là đa thức đại số hoặc phân thức, $Q(x)$ là hàm logarit.</p> <p>$\xrightarrow{PP} \begin{cases} u = Q(x) \\ dv = P(x)dx \end{cases}$</p> <p>$\Rightarrow \begin{cases} du = Q'(x)dx \\ v = \int P(x)dx \end{cases}.$</p>	<p>Minh họa:</p> <p>▪ $I = \int_1^e x^2 \ln x dx.$</p> <p>Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = x^2 dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{cases}.$</p> <p>$I = \frac{x^3}{3} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \dots$</p> <p>▪ $J = \int_1^e \frac{\ln x}{(x+1)^2} dx.$</p> <p>Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \frac{1}{(x+1)^2} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{1}{x} dx \\ v = -\frac{1}{x+1} + 1 = \frac{x}{x+1} \end{cases}.$ <small>chọn $C=1$</small></p> <p>$J = \frac{x}{x+1} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e}{e+1} - \ln x+1 \Big _1^e = \dots$</p>

b) Phương pháp tích phân đổi biến:

❖ **Đổi biến loại 1:** Xét tích phân dạng $I = \int_a^b f[u(x)].u'(x)dx.$

$\xrightarrow{PP} \rightarrow$ Đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x)dx$. **Đổi cận:** $x = a \Rightarrow t_1 = u(a)$, $x = b \Rightarrow t_2 = u(b)$.

Khi đó tích phân cần tính là: $I = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$. **Ta xét các dạng phổ biến sau:**

1) Dạng $I = \int_a^b f(x^n) \boxed{x^{n-1} dx}.$

$\xrightarrow{PP} \rightarrow t = \alpha x^n + \beta$ (hoặc $t = x^n$)

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^3+1} \boxed{x^2 dx}$$

• Đặt $t = x^3 + 1 \Rightarrow dt = 3 \boxed{x^2 dx} \Rightarrow \boxed{x^2 dx} = \frac{1}{3} dt.$

• **Đổi cận:** $x = 0 \Rightarrow t = 1$, $x = 1 \Rightarrow t = 2.$

• Ta có: $I = \int_1^2 \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{3} dt = \dots$

2) Dạng $I = \int_a^b f(\sqrt[n]{u}) \cdot \boxed{u' dx}.$

$\xrightarrow{PP} \rightarrow t = \sqrt[n]{u} \Rightarrow t^n = u.$

$$I = \int_0^{\sqrt{7}} \sqrt[3]{x^2+1} \cdot \boxed{xdx}$$

• Đặt $t = \sqrt[3]{x^2+1} \Rightarrow t^3 = x^2+1 \Rightarrow 3t^2 dt = 2 \boxed{xdx}$

	$\Rightarrow \boxed{xdx} = \frac{3}{2}t^2 dt . \text{Đổi cận:}$ $x=0 \Rightarrow t=1, x=\sqrt{7} \Rightarrow t=2 .$ <ul style="list-style-type: none"> • $I = \int_1^2 t \cdot \frac{3}{2}t^2 dt = \frac{3}{2} \int_1^2 t^3 dt = \dots\dots$
<p>3) Dạng $I = \int_a^b f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \boxed{\frac{1}{x^2} dx} .$</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \cdot \frac{1}{x} + \beta$ hay</p> <p>$t = \frac{1}{x}; t = \sqrt[n]{\alpha \frac{1}{x} + \beta}$ v.v...</p>	$I = \int_1^4 \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx$ <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \Rightarrow t^2 = 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow 2t dt = \frac{1}{x^2} dx .$ • Ta có: $I = 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^2 dt = \dots\dots$
<p>4) Dạng $I = \int_a^b f(\sqrt{x}) \cdot \boxed{\frac{1}{\sqrt{x}} dx} .$</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \sqrt{x} + \beta$ hay $t = \sqrt{x} \dots$</p>	$I = \int_1^4 \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = \sqrt{x} + 1 \Rightarrow dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \Rightarrow 2dt = \frac{1}{\sqrt{x}} dx .$ • Ta có: $I = \int_2^3 \frac{1}{t^2} \cdot 2dt = \dots\dots$
<p>5) Dạng $I = \int_a^b f(e^x) \cdot \boxed{e^x dx} .$</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha e^x + \beta$ hay $t = e^x .$</p>	$I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx \longrightarrow I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} e^x dx .$ <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} dt = e^x dx \\ e^x = t - 1 \end{cases} . \text{Khi đó: } I = \int_2^{e+1} \frac{t-1}{t} dt .$ • $I = \int_2^{e+1} \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = \dots\dots$
<p>6) Dạng $I = \int_a^b f(\ln x) \cdot \boxed{\frac{1}{x} dx} .$</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \ln x + \beta$ hay $t = \ln x .$</p>	$I = \int_1^{e^2} \frac{2 \ln x - 1}{x} dx \longrightarrow I = \int_1^{e^2} (2 \ln x - 1) \cdot \frac{1}{x} dx .$ <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x} dx .$ • Khi đó $I = \int_0^2 (2t - 1) dt = \left(t^2 - t\right) \Big _0^2 = \dots\dots$
<p>7) Dạng $I = \int_a^b f(\sin x) \cdot \boxed{\cos x dx} .$</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \sin x + \beta$ hay $t = \sin x .$</p>	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + 2 \sin x} dx$ <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = 1 + 2 \sin x \Rightarrow dt = 2 \cos x dx \Rightarrow \frac{1}{2} dt = \cos x dx .$ • Khi đó $I = \int_1^3 \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t \Big _1^3 = \dots\dots$
<p>8) Dạng $I = \int_a^b f(\cos x) \cdot \boxed{\sin x dx} .$</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \cos x + \beta$ hay $t = \cos x$</p>	$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2x - \cos x + 1) \sin x dx$ $\longrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 x - \cos x) \sin x dx .$ <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx \Rightarrow -dt = \sin x dx .$

<p>9) Dạng $I = \int_a^b f(\tan x) \frac{1}{\cos^2 x} dx$.</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \tan x + \beta$ hay $t = \tan x$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Khi đó: $I = \int_1^0 (2t^2 - t)(-dt) = \int_0^1 (2t^2 - t) dt = \dots$ $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 x}{\cos^2 x} dx$ • Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$. • Khi đó: $I = \int_0^{\sqrt{3}} t^3 dt = \dots$
<p>10) Dạng $I = \int_a^b f(\cot x) \frac{1}{\sin^2 x} dx$.</p> <p>$\xrightarrow{PP} t = \alpha \cot x + \beta$ hay $t = \cot x$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x \sin^2 x} dx \longrightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cot^2 x - 1}{\cot x} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx$. • Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} dx \Rightarrow -dt = \frac{1}{\sin^2 x} dx$. • $I = \int_1^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{t^2 - 1}{t} (-dt) = \dots$
<p>11) Dạng</p> $I = \int_a^b f \begin{pmatrix} \sin^2 x \\ \cos^2 x \\ \cos 2x \end{pmatrix} \boxed{\sin 2x dx}.$ <p>$\xrightarrow{PP} \begin{cases} t = \sin^2 x \\ t = \cos^2 x \\ t = \cos 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dt = \sin 2x dx \\ dt = -\sin 2x dx \\ dt = -2 \sin 2x dx \end{cases}$</p>	<ul style="list-style-type: none"> $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin^2 x + 3) \sin 2x dx$ • Đặt $t = \sin^2 x \Rightarrow dt = 2 \sin x (\sin x)' dx = \sin 2x dx$. • Ta có: $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (t + 3) dt = \dots$

❖ **Đổi biến loại 2:** Xét tích phân dạng $I = \int_a^b f(x) dx$ trong đó $f(x)$ phức tạp và không thể tính nguyên hàm trực tiếp. **Đổi biến loại 2** là ta đặt: $x = u(t) \Rightarrow dx = u'(t) dt$. Ta xét 4 dạng phổ biến sau:

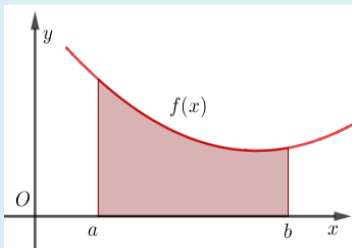
<p>1) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx$.</p> <p>$\xrightarrow{PP} x = a \sin t$ (hay $x = a \cos t$).</p>	<ul style="list-style-type: none"> $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ • Đặt $x = 2 \sin t \Rightarrow dx = 2 \cos t dt$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 2 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$. Ta có: $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4 \sin^2 t} = \sqrt{4 \cos^2 t} = 2 \cos t$ <small>≥ 0</small> do $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. • Ta có: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos t dt}{2 \cos t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$.
<p>2) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx$</p> <p>hay $\int_{x_1}^{x_2} f\left(\frac{1}{a^2 + x^2}\right) dx$.</p> <p>$\xrightarrow{PP} x = a \tan t$.</p>	<ul style="list-style-type: none"> $I = \int_0^3 \frac{1}{x^2 + 9} dx$ • Đặt $x = 3 \tan t \Rightarrow dx = 3(1 + \tan^2 t) dt$. • Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 0, \quad x = 3 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$.

	<ul style="list-style-type: none"> • Khi đó: $x^2 + 9 = 9 \tan^2 t + 9 = 9(\tan^2 t + 1)$. • Vậy $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3(1 + \tan^2 t) dt}{9(\tan^2 t + 1)} = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt = \frac{\pi}{12}$. 	
<p>3) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx$</p> <p>$\xrightarrow{PP} x = \frac{a}{\sin t}$ hay $x = \frac{a}{\cos t}$</p>	<p>$I = \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $x = \frac{2}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt$. • Đổi cận: $x = 2 \Rightarrow t = 0, x = 4 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$. • Khi đó: $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{\frac{4}{\cos^2 t} - 4}}{\frac{2}{\cos t}} \cdot \frac{2 \sin t}{\cos^2 t} dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t \cdot dt$ $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 t} - 1 \right) \cdot dt = 2(\tan t - t) \Big _0^{\frac{\pi}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$	
<p>4) Dạng $I = \int_{x_1}^{x_2} f\left(\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\right) dx$</p> <p>$\xrightarrow{PP} x = a \cos 2t$.</p>	<p>$I = \int_0^2 \sqrt{\frac{2-x}{2+x}} dx$</p> <ul style="list-style-type: none"> • Đặt $x = 2 \cos 2t \Rightarrow dx = -4 \sin 2t \cdot dt = -8 \sin t \cdot \cos t \cdot dt$ • Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}, x = 2 \Rightarrow t = 0$. <p>Ta có: $\sqrt{\frac{2-x}{2+x}} = \sqrt{\frac{2-2 \cos 2t}{2+2 \cos 2t}} = \sqrt{\frac{1-\cos 2t}{1+\cos 2t}} = \frac{\sin t}{\cos t}$</p> <ul style="list-style-type: none"> • $I = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin t}{\cos t} \sin t \cdot \cos t dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 t dt = \dots$ 	

3. Ứng dụng tích phân để tính diện tích - thể tích:

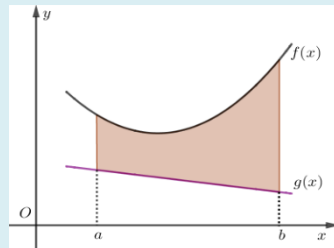
- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, trục Ox , $x = a$, $x = b$ thì có diện tích:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



- Hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ thì có diện tích:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$



- Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y = f(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$ quanh Ox , ta được khối trụ tròn có thể tích

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

- Khi xoay hình phẳng $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a, x = b \end{cases}$ quanh Ox ,

được khối trụ tròn có thể tích

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx$$

▪ Xét hình khối được giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = a, x = b$. Khi cắt khối này ta được thiết diện có diện tích $S(x)$ (là hàm liên tục trên $[a;b]$). Thể tích khối này trên $[a;b]$ là: $V = \int_a^b S(x)dx$.

4. Công thức chuyển động:

Xét hàm quãng đường $S(t)$, hàm vận tốc $v(t)$ và hàm gia tốc $a(t)$. Ba hàm này sẽ biến thiên theo t .

▪ $S(t) = \int v(t)dt \Leftrightarrow v(t) = S'(t)$

▪ $v(t) = \int a(t)dt \Leftrightarrow a(t) = v'(t)$

XI. SỐ PHỨC VÀ CÁC YẾU TỐ LIÊN QUAN

Số phức có dạng: $z = a + bi$ với $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ i^2 = -1 \end{cases}$ (i : là đơn vị ảo). Ký hiệu tập số phức: \mathbb{C} .

Thành phần	Hình học	Minh họa
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Phần thực: a. Nếu $a = 0$ thì $z = bi$ được gọi là số thuần ảo. ▪ Phần ảo: b. Nếu $b = 0$ thì $z = a$ là số thực. ▪ Khi $a = b = 0$ thì $z = 0$ vừa là số thuần ảo vừa là số thực. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Điểm $M(a;b)$ biểu diễn cho z trên hệ trục Oxy. ▪ Mô-đun: $z = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$. 	

Số phức liên hợp - Hai số phức bằng nhau	Căn bậc hai	Phương trình bậc hai
Cho $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ Khi đó: ▪ Số phức liên hợp của z là $\bar{z} = a - bi$. ▪ $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$. ▪ $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$.	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Căn bậc hai của $a > 0$ là $\pm\sqrt{a}$. ▪ Căn bậc hai của $a < 0$ là $\pm i\sqrt{-a}$. ▪ Căn bậc hai của số phức $z = a + bi$ là hai số phức dạng $w = x + yi$ với $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Phương trình $z^2 = a > 0$ có hai nghiệm phức $z = \pm\sqrt{a}$. ▪ Phương trình $z^2 = a < 0$ có hai nghiệm phức $z = \pm i\sqrt{-a}$. ▪ Phương trình $az^2 + bz + c = 0$ ($a \neq 0$) với $\Delta < 0$ sẽ có hai nghiệm phức là: $z_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Công thức bổ trợ	Cho hai số phức z_1, z_2 , có: ▪ $ z_1 z_2 = z_1 \cdot z_2 $. ▪ $\left \frac{z_1}{z_2} \right = \frac{ z_1 }{ z_2 }$ với $z_2 \neq 0$. ▪ $ z_1 - z_2 = MN$ với M, N theo thứ tự là hai điểm biểu diễn cho z_1, z_2 .
-------------------------	--

Dấu hiệu cơ bản nhận biết tập hợp điểm M biểu diễn cho số phức z

<ul style="list-style-type: none"> ▪ $ax + by + c = 0 \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M một là đường thẳng. ▪ $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. ▪ $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0 \end{cases} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là hình tròn tâm $I(a;b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. ▪ $\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ x = ay^2 + by + c \end{cases} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là đường parabol.

▪ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường elip**.

▫ **Đặc biệt: Nhận biết ngay không cần biến đổi**

▪ $|z - (a + bi)| = m > 0 \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường tròn** có tâm $I(a; b)$, bán kính $R = m$.

▪ $|z - (a_1 + b_1i)| = |z - (a_2 + b_2i)| \Leftrightarrow \underbrace{MA = MB}_{A(a_1; b_1), B(a_2; b_2)} \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường trung trực** đoạn thẳng AB .

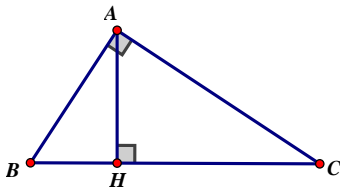
▪ $|z - (a_1 + b_1i)| + |z - (a_2 + b_2i)| = 2a \Leftrightarrow \underbrace{MF_1 + MF_2}_{\substack{F_1(a_1; b_1), F_2(a_2; b_2) \\ F_1F_2 < 2a}} = 2a \xrightarrow{KL}$ Tập hợp điểm M là **đường elip** với hai tiêu điểm F_1, F_2 .

F_1, F_2 .

XII. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH CỦA CHÚNG

A - MỘT SỐ HÌNH PHẪNG CƠ BẢN:

1. Tam giác vuông:



Pitago
▪ $AB^2 + AC^2 = BC^2$

▪ $AB^2 = BH \cdot BC$

▪ $AC^2 = CH \cdot BC$

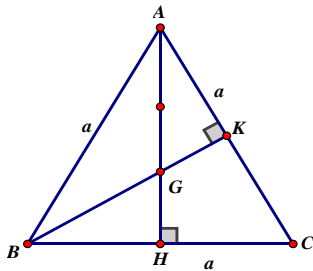
▪ $AH^2 = BH \cdot CH$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} AH \cdot BC$$

▪ $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot AC}{\sqrt{AB^2 + AC^2}}$

▪ $\sin B = \frac{AC}{BC}$ (đối/huyền) ▪ $\cos B = \frac{AB}{BC}$ (kề/huyền) ▪ $\tan B = \frac{AC}{AB}$ (đối/kề) ▪ $\cot B = \frac{AB}{AC}$ (kề/đối)

2. Tam giác đều:



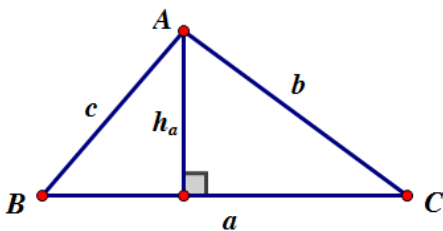
Giả sử tam giác ABC đều có cạnh a ; trọng tâm G ; các đường cao (trùng với trung tuyến) gồm AH, BK .

▪ Đường cao: $AH = BK = \frac{(cạnh) \times \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

▪ $AG = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$; $GH = \frac{1}{3} AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

▪ Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{(cạnh)^2 \times \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

3. Tam giác thường:



Giả sử tam giác ABC có $a = BC, b = AC, c = AB$; các đường cao h_a, h_b, h_c lần lượt ứng với cạnh a, b, c . Ký hiệu R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp Δ .

▪ Định lí Sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

▪ Định lí Cô-sin: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$;
 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

▪ Diện tích: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} h_a \cdot a = \frac{1}{2} h_b \cdot b = \frac{1}{2} h_c \cdot c$; $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = pr$; $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p = \frac{a+b+c}{2}$ (nửa chu vi).

Công thức Hê-rông

4. Hình vuông:

Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh a ; hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của CD, AD ; I là tâm hình vuông.

- Đường chéo: $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC = BD = (\text{cạnh}) \times \sqrt{2} = a\sqrt{2} \end{cases}$
- $IA = IB = IC = ID = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên I là tâm đường tròn ngoại tiếp hình vuông.
- Diện tích: $S_{ABCD} = (\text{cạnh})^2 = a^2$; chu vi: $p = 4a$.
- Vì $\triangle ABN = \triangle ADM$, ta chứng minh được: $AM \perp BN$.

5. Hình chữ nhật:

Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm I có $AB = a, AD = b$.

- Đường chéo: $AC = BD = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- $IA = IB = IC = ID = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ nên I là tâm đường tròn đi qua bốn điểm A, B, C, D .
- Diện tích: $S_{ABCD} = a.b$; chu vi: $p = 2(a+b)$.

6. Hình thoi:

Cho hình thoi $ABCD$ có tâm I , cạnh bằng a .

- Đường chéo $AC \perp BD$; $AC = 2AI = 2AB \cdot \sin \widehat{ABI} = 2a \cdot \sin \widehat{ABI}$.
- Diện tích: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$; $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ACD} = 2S_{\triangle ABD}$.

Đặc biệt: Nếu hình thoi có góc $\widehat{B} = \widehat{D} = 60^\circ$ ($\widehat{A} = \widehat{C} = 120^\circ$) thì ta chia hình thoi ra làm hai tam giác đều: $\triangle ABC = \triangle ACD$; $AC = a$ và

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$.

B - THỂ TÍCH KHỐI CHÓP:

7. Hình chóp:

$$V = \frac{1}{3} h \cdot S_{\tilde{n}}$$

7.2. Tứ diện đều:

7.1. Hình chóp tam giác đều

- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là tam giác đều cạnh a .
- $SH \perp (ABC)$ với H là trọng tâm (cũng là trực tâm) $\triangle ABC$.

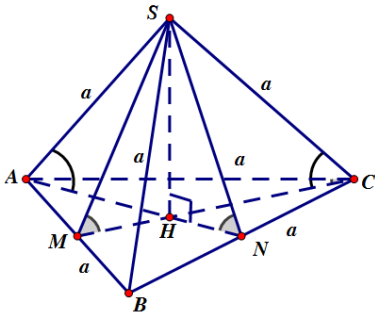
$$\begin{cases} S_{\tilde{n}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \\ SH = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Thế tích}} V = \frac{1}{3} h \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

☆ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy: $(\widehat{SA}, (ABC)) = \widehat{SAH}$
 $= (\widehat{SC}, (ABC)) = \widehat{SCH}$.

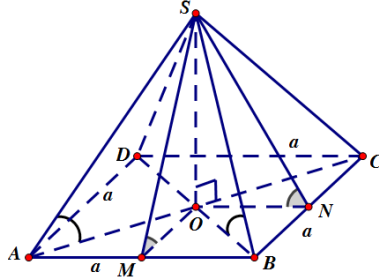
☆ Góc giữa mặt bên và mặt đáy:
 $(\widehat{(SAB), (ABC)}) = \widehat{SMH}$
 $= (\widehat{(SBC), (ABC)}) = \widehat{SNH}$.

- Đây cũng là hình chóp tam giác đều, đặc biệt là cạnh bên bằng cạnh đáy. Thể tích:

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$



7.3. Hình chóp tứ giác đều:



- Tất cả cạnh bên bằng nhau.
- Đáy là hình vuông cạnh a .
- $SO \perp (ABCD)$ với O là tâm hình vuông $ABCD$.

$$\begin{cases} S_h = a^2 \\ SO = h \end{cases} \xrightarrow{\text{Theáich}} V = \frac{1}{3} h \cdot a^2$$

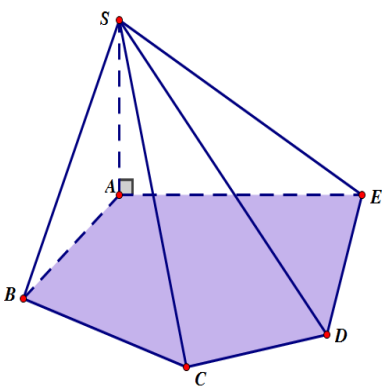
☆ Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{aligned} \text{đáy: } (\overline{SA}, (ABCD)) &= \widehat{SAO} \\ &= (\overline{SB}, (ABCD)) = \widehat{SBO}. \end{aligned}$$

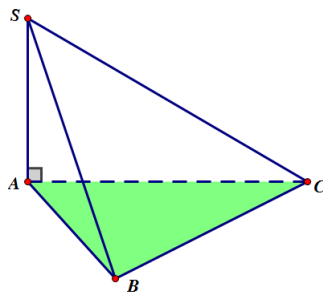
☆ Góc giữa mặt bên và mặt đáy:

$$\begin{aligned} (\overline{SAB}, (ABCD)) &= \widehat{SMO} \\ &= (\overline{SBC}, (ABCD)) = \widehat{SNO}. \end{aligned}$$

7.4. Hình chóp có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy.



Đáy là tam giác

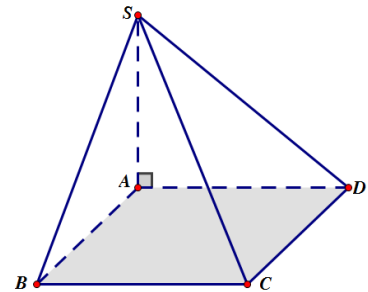


$$\begin{cases} h = SA \\ S_h = S_{\Delta ABC} \end{cases} \xrightarrow{\text{Theáich}} V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC}$$

- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{cases} (\overline{SB}, (ABC)) = \widehat{SBA} \\ (\overline{SC}, (ABC)) = \widehat{SCA} \end{cases}$$

Đáy là tứ giác đặc biệt

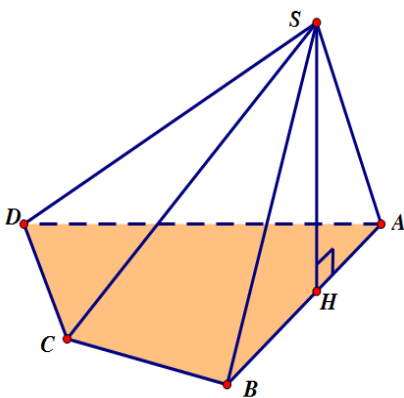


$$\begin{cases} h = SA \\ S_h = S_{ABCD} \end{cases} \xrightarrow{\text{Theáich}} V = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD}$$

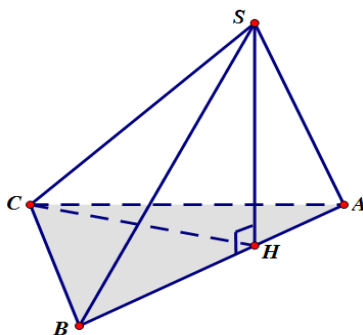
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{cases} (\overline{SB}, (ABCD)) = \widehat{SBA} \\ (\overline{SC}, (ABCD)) = \widehat{SCA} \end{cases}$$

7.5. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy.



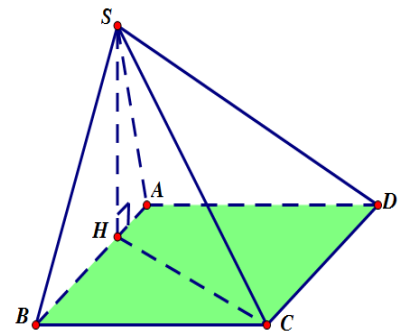
Đáy là tam giác



- Đường cao $h = SH$ cũng là đường cao của ΔSAB .
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

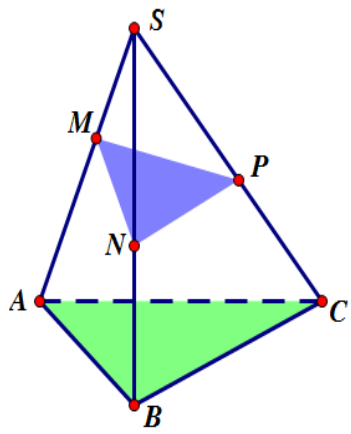
$$\begin{cases} (\overline{SA}, (ABC)) = \widehat{SAH} \\ (\overline{SC}, (ABC)) = \widehat{SCH} \end{cases}$$

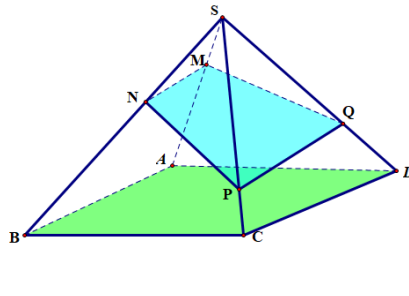
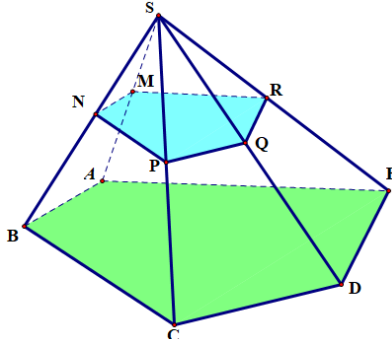
Đáy là tứ giác đặc biệt



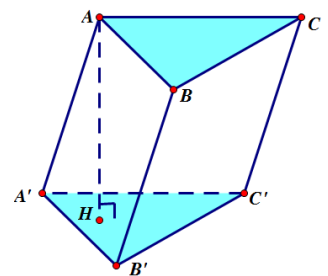
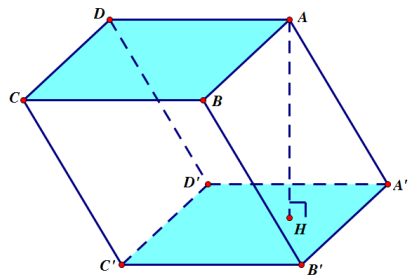
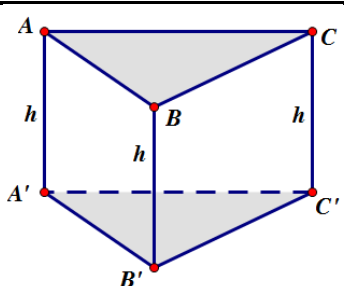
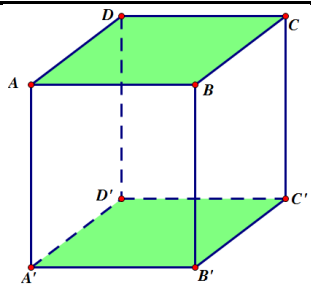
- Đường cao $h = SH$ cũng là đường cao của ΔSAB .
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy:

$$\begin{cases} (\overline{SA}, (ABCD)) = \widehat{SAH} \\ (\overline{SC}, (ABCD)) = \widehat{SCH} \end{cases}$$

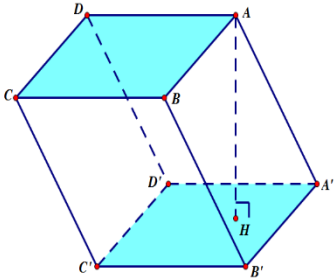
<p>Cho hình chóp có đáy là tam giác ABC. Các điểm M, N, P nằm trên cạnh SA, SB, SC. Ta có:</p> $\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$		<p>Đặc biệt: $M \equiv A$</p> $\frac{V_{S.ANP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SN}{SB} \cdot \frac{SP}{SC}$	<p>Đặc biệt $M \equiv A, N \equiv B$</p> $\frac{V_{S.ABP}}{V_{S.ABC}} = \frac{SP}{SC}$
---	---	---	--

	<p>Hình chóp có đáy là hình bình hành với $\frac{SM}{SA} = x$, $\frac{SN}{SB} = y$, $\frac{SP}{SC} = z$, $\frac{SQ}{SD} = t$.</p>	<p>Hình chóp có đáy là đa giác bất kỳ. Chẳng hạn: $(MNPQR) \parallel (ABCDE)$ và tỉ số: $x = \frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{SR}{SE}$</p>	
<p>Khi đó:</p> $\frac{V_{S.MNPQ}}{V_{S.ABCD}} = \frac{xyz + xyt + xzt + yzt}{4}$	<p>và $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{1}{y} + \frac{1}{t}$.</p>	<p>Khi đó: $\frac{V_{S.MNPQR}}{V_{S.ABCDE}} = x^3$</p>	

D - THỂ TÍCH KHỐI LĂNG TRỤ:

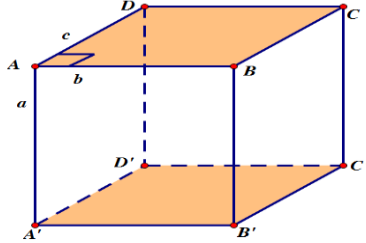
<p>1. Hình lăng trụ thường:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Hai đáy là hai hình giống nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song. ▪ Các cạnh bên song song và bằng nhau. Các mặt bên là các hình bình hành. ▪ Thể tích: $V = h \cdot S_{\text{đ}}.$ 	<p>Đáy là tam giác</p>  $V = AH \cdot S_{\Delta ABC} = AH \cdot S_{\Delta A'B'C'}$	<p>Đáy là tứ giác</p>  $V = AH \cdot S_{ABCD} = AH \cdot S_{A'B'C'D'}$
<p>2. Hình lăng trụ đứng:</p> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Các cạnh bên cùng vuông góc với hai mặt đáy nên mỗi cạnh bên cũng là đường cao của lăng trụ. ☞ Lăng trụ tam giác đều: Là lăng trụ đứng và có hai đáy là hai tam giác đều bằng nhau. 	<p>Đáy là tam giác</p>  <p>▪ Thể tích: $V = h \cdot S_{\text{đ}}$ với $h = AA' = BB' = CC'.$</p>	<p>Đáy là tứ giác</p>  <p>▪ Thể tích: $V = h \cdot S_{\text{đ}}$ với $h = AA' = BB' = CC' = DD'.$</p>

3. Hình hộp:



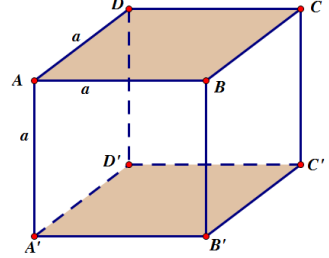
- Là lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.
- Thể tích: $V = h \cdot S_{\text{đáy}}$.

3.1 Hình hộp chữ nhật:



- Là lăng trụ đứng có đáy là hình chữ nhật.
- $V = abc$ với a, b, c là ba kích thước của hình hộp chữ nhật.

3.2. Hình lập phương:

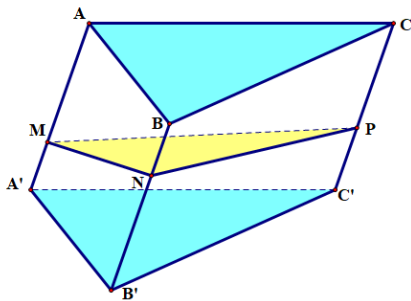


- Là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau.
- $V = a^3$ với a là cạnh của hình lập phương.

4. Tỷ số thể tích đối với lăng trụ:

Lăng trụ có đáy tam giác

$$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}$$

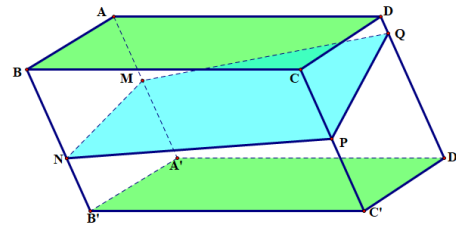


Ta có:
$$\frac{V_{ABC.MNP}}{V_{ABC.A'B'C'}} = \frac{x + y + z}{3}$$

Lăng trụ đáy là hình bình hành, hình chữ nhật, hình thoi, hình vuông

(Lăng trụ này chính là hình hộp thường hoặc hình hộp chữ nhật, hình lập phương)

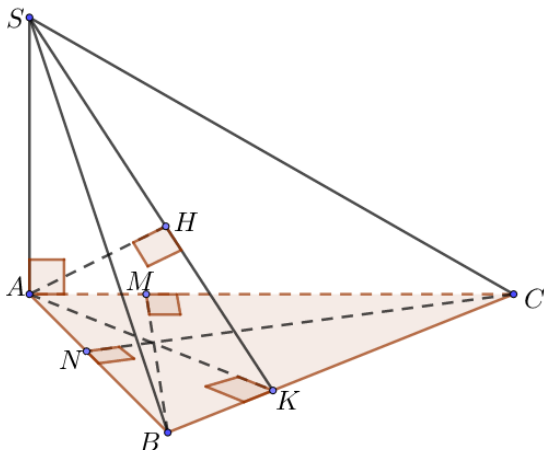
$$x = \frac{AM}{AA'}, y = \frac{BN}{BB'}, z = \frac{CP}{CC'}, t = \frac{DQ}{DD'}$$



Ta có:
$$\frac{V_{ABCD.MNPQ}}{V_{ABCD.A'B'C'D'}} = \frac{x + y + z + t}{4}$$
 và $x + z = y + t$

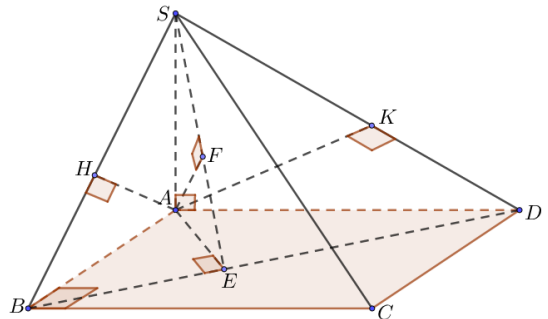
E - BÀI TOÁN KHOẢNG CÁCH

1. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy là tam giác



- $d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AK}{\sqrt{SA^2 + AK^2}}$.
- $d(B, (SAC)) = BM$; $d(C, (SAB)) = CN$.

2. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy là hình vuông, hình chữ nhật



- $d(A, (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = d(D, (SBC))$.
- $d(A, (SCD)) = AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = d(B, (SCD))$.
- $d(A, (SBD)) = AF = \frac{SA \cdot AE}{\sqrt{SA^2 + AE^2}} = d(C, (SBD))$.

<ul style="list-style-type: none"> $d(SA, BC) = AK.$ 	<ul style="list-style-type: none"> $d(AD, SB) = AH; d(AB, SD) = AK.$ $d(AD, SC) = d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH.$ $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = AK.$
--	--

3. Hình chóp tam giác đều

- $d(O, (SBC)) = OH = \frac{SO \cdot OK}{\sqrt{SO^2 + OK^2}}$
 $= d(O, (SAB)) = d(O, (SAC)).$
- $d(A, (SBC)) = 3d(O, (SBC)) = 3OH$
 $= d(B, (SAC)) = d(C, (SAB)).$
- $d(SA, BC) = IK = d(SB, AC) = d(SC, AB).$

4. Hình chóp tứ giác đều

- $d(O, (SCD)) = OH = \frac{SO \cdot OK}{\sqrt{SO^2 + OK^2}}$
 $= d(O, (SAB)) = d(O, (SBC)) = d(O, (SAD)).$
- $d(A, (SCD)) = 2d(O, (SCD)) = 2OH = d(A, (SBC))$
 $= d(B, (SAD)) = d(B, (SCD)) = \dots$
- $d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 2OH$
 $= d(AB, SD) = d(AD, SB) = d(AD, SC) = \dots$

F - MẶT TRỤ, MẶT NÓN - MẶT CẦU

MẶT NÓN

☞ **Hình thành:** Quay Δ vuông SOM quanh trục SO, ta được mặt nón như hình bên với:

$$\begin{cases} h = SO \\ r = OM \end{cases}$$

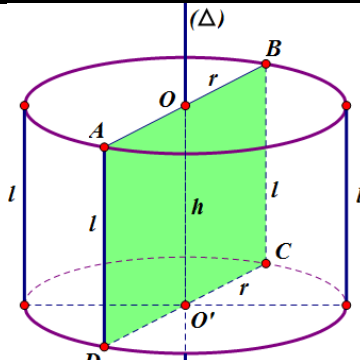
Các yếu tố mặt nón:

- **Đường cao:** $h = SO$. (SO cũng được gọi là trục của hình nón).
- **Bán kính đáy:**
 $r = OA = OB = OM$.
- **Đường sinh:**
 $l = SA = SB = SM$.
- **Góc ở đỉnh:** \widehat{ASB} .
- **Thiết diện qua trục:** ΔSAB cân tại S.
- **Góc giữa đường sinh và mặt đáy:** $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SMO}$.

Một số công thức:

- **Chu vi đáy:** $p = 2\pi r$.
- **Diện tích đáy:** $S_d = \pi r^2$.
- **Thể tích:** $V = \frac{1}{3} h \cdot S_d = \frac{1}{3} h \cdot \pi r^2$.
(liên tưởng đến thể tích khối chóp).
- **Diện tích xung quanh:** $S_{xq} = \pi r l$.
- **Diện tích toàn phần:**
 $S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi r l + \pi r^2$.

MẶT TRỤ	Các yếu tố mặt trụ:	Một số công thức:
----------------	----------------------------	--------------------------

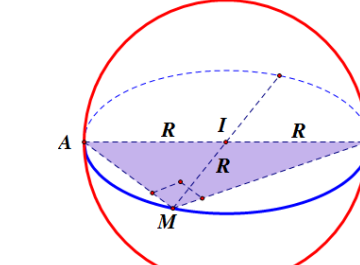


Hình thành: Quay hình chữ nhật $ABCD$ quanh đường trung bình OO' , ta có mặt trụ như hình bên.

- Đường cao: $h = OO'$.
- Đường sinh: $l = AD = BC$. Ta có: $l = h$.
- Bán kính đáy: $r = OA = OB = O'C = O'D$.
- Trục (Δ) là đường thẳng đi qua hai điểm O, O' .
- Thiết diện qua trục: Là hình chữ nhật $ABCD$.

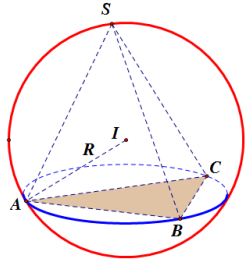
- Chu vi đáy: $p = 2\pi r$.
- Diện tích đáy: $S_d = \pi r^2$.
- Thể tích khối trụ: $V = h.S_d = h.\pi r^2$.
- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi r.h$.
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi r.h + 2\pi r^2$.

MẶT CẦU **Một số công thức:** **Mặt cầu ngoại tiếp đa diện**
Mặt cầu nội tiếp đa diện

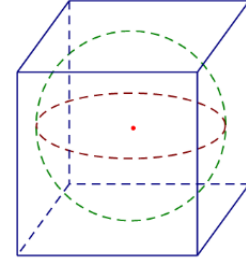


Hình thành: Quay đường tròn tâm I , bán kính $R = \frac{AB}{2}$ quanh trục AB , ta có mặt cầu như hình vẽ.

- Tâm I , bán kính $R = IA = IB = IM$.
- Đường kính $AB = 2R$.
- Thiết diện qua tâm mặt cầu: Là đường tròn tâm I , bán kính R .
- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$.
- Thể tích khối cầu: $V = \frac{4\pi R^3}{3}$.



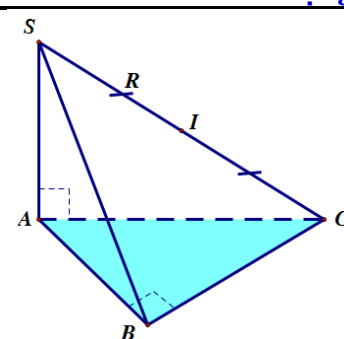
Mặt cầu ngoại tiếp đa diện là mặt cầu đi qua tất cả đỉnh của đa diện đó.



Mặt cầu nội tiếp đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của đa diện đó.

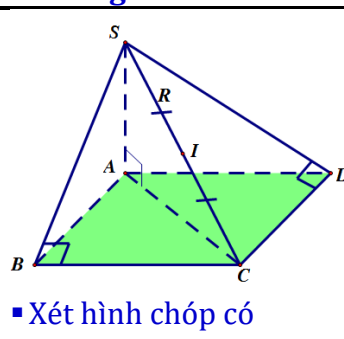
CÁCH TÌM BÁN KÍNH MẶT CẦU NGOẠI TIẾP HÌNH CHÓP THƯỜNG GẶP

1. Hình chóp có các đỉnh nhìn một cạnh dưới một góc vuông.

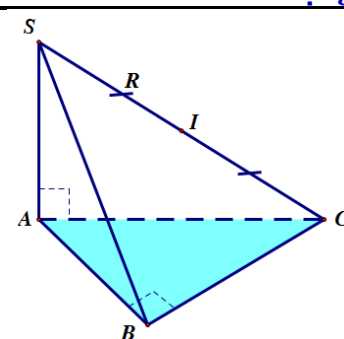


- Xét hình chóp có $SA \perp (ABC)$ và $\widehat{ABC} = 90^\circ$.
- Ta có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^\circ$ nên mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC , bán

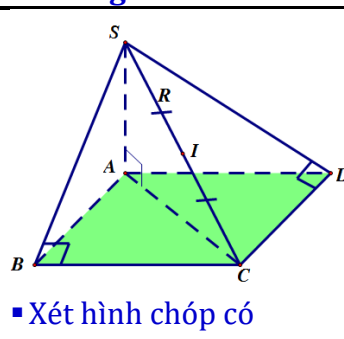
2. Hình chóp đều.



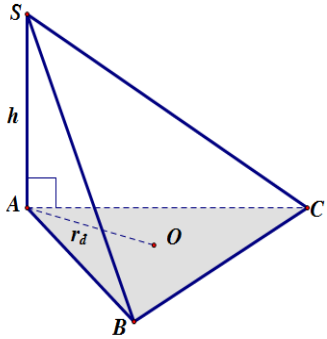
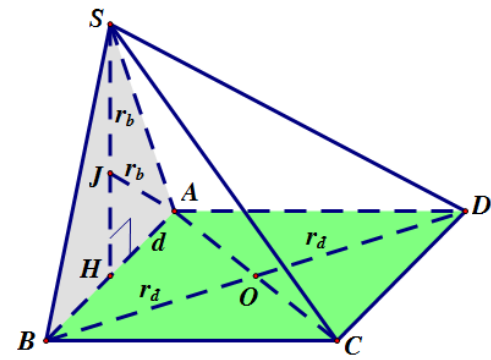
- Xét hình chóp có $SA \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc hình vuông.
- Ta có: $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^\circ$ Suy ra mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có tâm I là trung điểm SC , bán



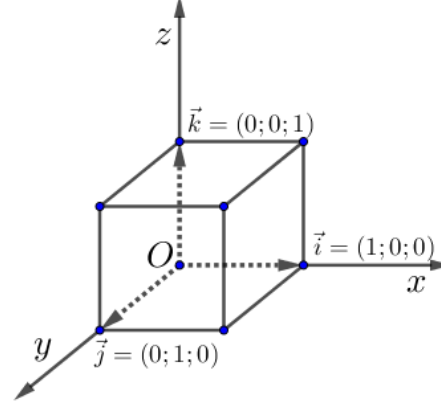
- Xét hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng b và đường cao $SH = h$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $R = \frac{b^2}{2h}$.



- Xét hình chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng b và chiều cao $SO = h$.
- Bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp trên là $R = \frac{b^2}{2h}$.

kính $R = \frac{SC}{2}$.	kính $R = \frac{SC}{2}$.
3. Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.	4. Hình chóp có mặt bên vuông góc với mặt đáy.
<div style="display: flex; align-items: flex-start;">  <div style="margin-left: 20px;"> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Khi đó mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có bán kính $R = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + r_n^2}$. ▪ Nếu đáy là tam giác đều cạnh a thì $r_n = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. ▪ Nếu đáy là hình vuông cạnh a thì $r_n = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. ▪ Nếu đáy là hình chữ nhật cạnh a, b thì $r_n = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$. </div> </div> <p>▪ Xét hình chóp có $SA \perp$ (đáy) và $SA = h$; bán kính đường tròn ngoại tiếp của đáy là r_n.</p>	<div style="display: flex; align-items: flex-start;">  <div style="margin-left: 20px;"> <ul style="list-style-type: none"> ▪ Xét hình chóp có mặt bên $(SAB) \perp$ (đáy), bán kính ngoại tiếp đáy là r_n, bán kính ngoại tiếp $\triangle SAB$ là r_b, $d = AB = (SAB) \cap$ (đáy). (đoạn giao tuyến) ▪ Khi đó bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \sqrt{r_n^2 + r_b^2 - \frac{d^2}{4}}$. </div> </div>

XIII. HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

	1. Hệ trục tọa độ Oxyz: <ul style="list-style-type: none"> ▪ Hệ trục gồm ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc nhau. ▪ Trục Ox: trục hoành, có vector đơn vị $\vec{i} = (1; 0; 0)$. ▪ Trục Oy: trục tung, có vector đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$. ▪ Trục Oz: trục cao, có vector đơn vị $\vec{k} = (0; 0; 1)$. ▪ Điểm $O(0; 0; 0)$ là gốc tọa độ.
2. Tọa độ vector: Vector $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftrightarrow \vec{u} = (x; y; z)$. Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Ta có:	
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$ ▪ $k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$ ▪ $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ \vec{a} cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \ (k \in R)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \ (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$.
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ▪ $\vec{a}^2 = \vec{a} ^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$
<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} } = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$
3. Tọa độ điểm: $M(x; y; z) \Leftrightarrow \vec{OM} = (x; y; z)$. Cho $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C)$, ta có:	

<ul style="list-style-type: none"> $\overline{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ 	<ul style="list-style-type: none"> $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
<ul style="list-style-type: none"> Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right).$ 	<ul style="list-style-type: none"> Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right).$

QUY TẮC CHIẾU ĐẶC BIỆT

Chiếu điểm trên trục tọa độ	Chiếu điểm trên mặt phẳng tọa độ
<ul style="list-style-type: none"> Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x)]{\text{Chiếu vào Ox}} M_1(x_M; 0; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y)]{\text{Chiếu vào Oy}} M_2(0; y_M; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } z)]{\text{Chiếu vào Oz}} M_3(0; 0; z_M)$ 	<ul style="list-style-type: none"> Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, y)]{\text{Chiếu vào Oxy}} M_1(x_M; y_M; 0)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, z)]{\text{Chiếu vào Oyz}} M_2(0; y_M; z_M)$ Điểm $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, z)]{\text{Chiếu vào Oxz}} M_3(x_M; 0; z_M)$
Đối xứng điểm qua trục tọa độ	Đối xứng điểm qua mặt phẳng tọa độ
<ul style="list-style-type: none"> $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x; \text{ ngược dấu } y, z)]{\text{Nhã xoay qua Ox}} M_1(x_M; -y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y; \text{ ngược dấu } x, z)]{\text{Nhã xoay qua Oy}} M_2(-x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } z; \text{ ngược dấu } x, y)]{\text{Nhã xoay qua Oz}} M_3(-x_M; -y_M; z_M)$ 	<ul style="list-style-type: none"> $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, y; \text{ ngược dấu } z)]{\text{Nhã xoay qua Oxy}} M_1(x_M; y_M; -z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } x, z; \text{ ngược dấu } y)]{\text{Nhã xoay qua Oxz}} M_2(x_M; -y_M; z_M)$ $M(x_M; y_M; z_M) \xrightarrow[\text{(Giống trục } y, z; \text{ ngược dấu } x)]{\text{Nhã xoay qua Oyz}} M_3(-x_M; y_M; z_M)$

4. Tích có hướng của hai vector:

☞ **Định nghĩa:** Cho $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, tích có hướng của \vec{a} và \vec{b} là:

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1).$$

☞ Tính chất:	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}$	$[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$	$ [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \sin(\angle \vec{a}, \vec{b})$
<ul style="list-style-type: none"> Điều kiện cùng phương của hai vector \vec{a} & \vec{b} là $[\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$ với $\vec{0} = (0; 0; 0)$. 	<ul style="list-style-type: none"> Điều kiện đồng phẳng của ba vector \vec{a}, \vec{b} và \vec{c} là $[\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$. 		
<ul style="list-style-type: none"> Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S_{\square ABCD} = [\vec{AB}, \vec{AD}]$. 	<ul style="list-style-type: none"> Diện tích tam giác ABC: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} [\vec{AB}, \vec{AC}]$. 		
<ul style="list-style-type: none"> Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA}'$. 	<ul style="list-style-type: none"> Thể tích tứ diện: $V_{ABCD} = \frac{1}{6} [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}$. 		

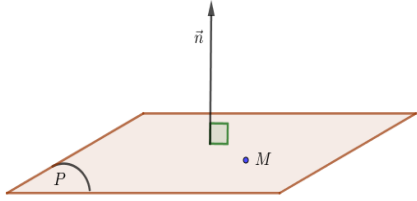
5. Phương trình mặt cầu:

<p>Dạng 1: $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$</p> <p>$\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} \text{tâm } I(a; b; c) \\ R = \sqrt{R^2} \end{cases}$</p>	<p>Dạng 2: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$</p> <p>$\xrightarrow{\text{Mặt cầu (S) có}} \begin{cases} \text{tâm } I(a; b; c) \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} \end{cases}$</p>
--	--

☞ Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ là phương trình mặt cầu $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$.

<p>Bài toán 5.1. Viết phương trình mặt cầu tâm I và đi qua điểm M.</p> <ul style="list-style-type: none"> Bước 1: Tính bán kính $R = IM$. Bước 2: Viết phương trình mặt cầu dạng 1. 	<p>Bài toán 5.2. Viết phương trình mặt cầu có đường kính AB.</p> <ul style="list-style-type: none"> Bước 1: Tìm tâm I là trung điểm AB. Bán kính $R = \frac{AB}{2} = IA = IB$. Bước 2: Viết phương trình mặt cầu dạng 1.
--	--

6. Phương trình mặt phẳng:



- Mặt phẳng (P) $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \text{VTPT } \vec{n} = (a; b; c) \end{array} \right.$ thì phương trình

$$(P): a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (*)$$

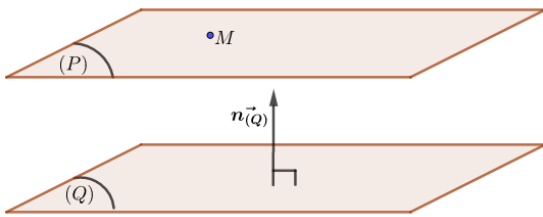
- Ngược lại, một mặt phẳng bất kỳ đều có phương trình dạng $ax + by + cz + d = 0$, mặt phẳng này có VTPT $\vec{n} = (a; b; c)$ với $a^2 + b^2 + c^2 > 0$.

Lưu ý: Vector pháp tuyến (VTPT) của mặt phẳng là vector khác $\vec{0}$ nằm trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đó.

Đặc biệt:

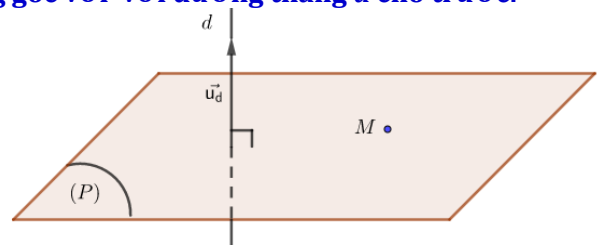
$$mp(Oyz): x = 0 \xrightarrow{\text{VTPT}} \vec{n}_{(Oyz)} = (1; 0; 0), mp(Oxz): y = 0 \xrightarrow{\text{VTPT}} \vec{n}_{(Oxz)} = (0; 1; 0), mp(Oxy): z = 0 \xrightarrow{\text{VTPT}} \vec{n}_{(Oxy)} = (0; 0; 1)$$

Bài toán 6.1. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và song song với mặt phẳng (Q) cho trước.



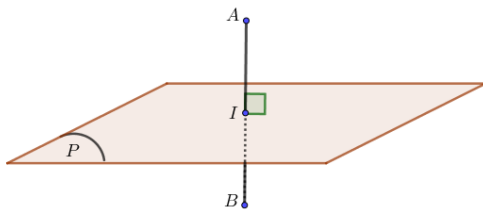
- Mặt phẳng (P) qua M, có VTPT là $\vec{n}_{(P)} = \vec{n}_{(Q)}$ nên phương trình được viết theo (*).

Bài toán 6.2. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với đường thẳng d cho trước.



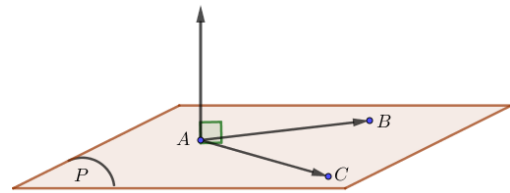
- Mặt phẳng (P) qua M, có VTPT $\vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d$ nên phương trình được viết theo (*).

Bài toán 6.3. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB.



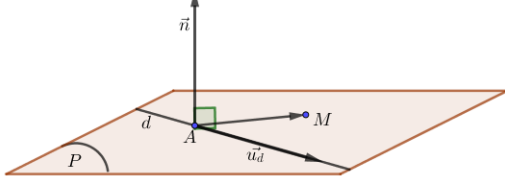
- Bước 1:** Tìm trung điểm I của đoạn AB và tính \vec{AB} .
- Bước 2:** Phương trình mp(P) $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } I \\ \text{VTPT } \vec{n} = \vec{AB} \end{array} \right.$

Bài toán 6.4. Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.



- Bước 1:** Tính tọa độ \vec{AB}, \vec{AC} và suy ra $[\vec{AB}, \vec{AC}]$.
- Bước 2:** Phương trình mp(P) $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } A \\ \text{VTPT } \vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] \end{array} \right.$

Bài toán 6.5. Viết phương trình mặt phẳng qua M và chứa đường thẳng d với $M \notin d$.

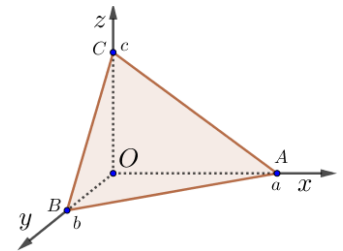


- Bước 1:** Chọn điểm $A \in d$ và một VTCP \vec{u}_d . Tính $[\vec{AM}, \vec{u}_d]$.
- Bước 2:** Phương trình mp(P) $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } M \\ \text{VTPT } \vec{n} = [\vec{AM}, \vec{u}_d] \end{array} \right.$

Bài toán 6.6. Viết phương trình mặt phẳng cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) với a.b.c ≠ 0.

- Phương trình mặt phẳng được viết theo đoạn chắn

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng

- Cho $\begin{cases} M(x_0; y_0; z_0) \\ mp(P): ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

- Cho hai mặt phẳng $\begin{cases} (P): ax + by + cz + d_1 = 0 \\ (Q): ax + by + cz + d_2 = 0 \end{cases}$

<ul style="list-style-type: none"> Khi đó: $d(M, (P)) = \frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. 	<ul style="list-style-type: none"> Khi đó: $d((P), (Q)) = \frac{ d_1 - d_2 }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ với $d_1 \neq d_2$.
---	--

<p>Góc giữa hai mặt phẳng</p>
<ul style="list-style-type: none"> Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình: $\begin{cases} (P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ Góc giữa (P) & (Q) được tính: $\cos((P), (Q)) = \frac{ \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q }{ \vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q } = \frac{ a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 }{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$ Chú ý: $0^\circ \leq \widehat{((P), (Q))} \leq 90^\circ$.

<p>Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng</p>
<p>Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có phương trình:</p> $\begin{cases} (P): a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ (Q): a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}$ <p>Ta có:</p> <ul style="list-style-type: none"> $(P) \parallel (Q) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$. $(P) \equiv (Q) \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$. $(P) \& (Q)$ cắt nhau $\Leftrightarrow a_1 : b_1 : c_1 \neq a_2 : b_2 : c_2$. $(P) \perp (Q) \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$. <p>Lưu ý: Các tỉ số trên có nghĩa khi mẫu khác 0.</p>

Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$ và mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R .

<ul style="list-style-type: none"> Trường hợp 1: $d(I, (P)) > R \Leftrightarrow (P)$ và (S) không có điểm chung. Trường hợp 2: $d(I, (P)) = R \Leftrightarrow (P)$ và (S) có một điểm chung. Khi đó ta nói (P) tiếp xúc (S) hoặc (P) là tiếp diện của (S).
<p>Ta có: $IM \perp (P)$ với M là tiếp điểm.</p>

<ul style="list-style-type: none"> Trường hợp 3: $d(I, (P)) < R \Leftrightarrow (P)$ cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn.
<p>Đường tròn giao tuyến có tâm H (là trung điểm AB), bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$ với $IH = d(I, (P))$.</p>

7. Phương trình đường thẳng:

<ul style="list-style-type: none"> Đường thẳng d qua $A(x_A; y_A; z_A)$ VTCP $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ Vector chỉ phương (VTCP) của đường thẳng d là vector khác $\vec{0}$, có giá trùng với d hoặc song song với d.

<ul style="list-style-type: none"> Phương trình tham số d: $\begin{cases} x = x_A + u_1t \\ y = y_A + u_2t \\ z = z_A + u_3t \end{cases}$ với t là tham số. Phương trình chính tắc d: $\frac{x - x_A}{u_1} = \frac{y - y_A}{u_2} = \frac{z - z_A}{u_3}$ với $u_1, u_2, u_3 \neq 0$.

<ul style="list-style-type: none"> Lưu ý: Nếu có cặp vector khác $\vec{0}$ không cùng phương sao cho $\begin{cases} \vec{a} \perp d \\ \vec{b} \perp d \end{cases}$ thì d có VTCP là: $\vec{u}_d = [\vec{a}, \vec{b}]$.

7.1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng:

Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng d_1, d_2 với $d_1 \left\langle \begin{array}{l} \text{qua } M \\ \text{VTCP } \vec{u}_1 \end{array} \right.$, $d_2 \left\langle \begin{array}{l} \text{qua } N \\ \text{VTCP } \vec{u}_2 \end{array} \right.$.

Bước I	Bước II	Kết luận
❖ $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \vec{0} \rightarrow$ Hai đường thẳng d_1, d_2 song song hoặc trùng nhau.	❖ $[\vec{u}_1, \overline{MN}] = \vec{0}$	$\rightarrow d_1 \equiv d_2$
	❖ $[\vec{u}_1, \overline{MN}] \neq \vec{0}$	$\rightarrow d_1 \parallel d_2$
❖ $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \neq \vec{0} \rightarrow$ Hai đường thẳng d_1, d_2 cắt nhau hoặc chéo nhau.	❖ $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{MN} = 0$	$\rightarrow d_1$ cắt d_2
	❖ $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{MN} \neq 0$	$\rightarrow d_1$ & d_2 chéo nhau

7.2. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng:

Xét vị trí tương đối giữa đường thẳng $d: \begin{cases} x = x_0 + u_1 t \\ y = y_0 + u_2 t \\ z = z_0 + u_3 t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.

Bước I:	Bước II: Giải PT (*), ta gặp 1 trong 3 trường hợp sau	Kết luận
❖ Thay phương trình tham số d vào phương trình (P) , ta được PT (*): $a(x_0 + u_1 t) + b(y_0 + u_2 t) + c(z_0 + u_3 t) + d = 0$	❖ PT (*) vô nghiệm	$\rightarrow d \parallel (P)$
	❖ PT (*) có 1 nghiệm $t = t_0$	$\rightarrow d$ cắt (P) tại một điểm
	❖ PT (*) có vô số nghiệm t .	$\rightarrow d \subset (P)$

7.3. Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:

☞ Cho điểm M và đường thẳng d (có phương trình tham số hoặc chính tắc).

▪ **Bước 1:** Chọn điểm $A \in d$ và một VTCP \vec{u}_d .

▪ **Bước 2:** $d(M, d) = \frac{[\vec{u}_d, \overline{AM}]}{|\vec{u}_d|}$.

7.4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng:

Trường hợp 1: Hai đường thẳng song song d_1, d_2 .

- **Bước 1:** Chọn điểm M (đẹp) thuộc d_1 .
- **Bước 2:** $d(d_1, d_2) = d(M, d_2)$. (xem 7.3)

Trường hợp 2: Hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2 .

- **Bước 1:** Ghi rõ $d_1 \left\langle \begin{array}{l} \text{qua } A(\dots) \\ \text{VTCP } \vec{u}_1 = (\dots) \end{array} \right.$, $d_2 \left\langle \begin{array}{l} \text{qua } B(\dots) \\ \text{VTCP } \vec{u}_2 = (\dots) \end{array} \right.$.
- **Bước 2:** Tính: $d(d_1, d_2) = \frac{[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overline{AB}}{[\vec{u}_1, \vec{u}_2]}$.

7.5. Góc giữa hai đường thẳng:

☞ Cho hai đường thẳng d_1, d_2 lần lượt có VTCP là \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

\rightarrow Ta có: $\cos(\widehat{d_1, d_2}) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|}$.

7.6. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng:

☞ Cho đường thẳng d có VTCP \vec{u} và mặt phẳng (P) có VTPT \vec{n} .

\rightarrow Ta có: $\sin(\widehat{d, (P)}) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$.

8. Hình chiếu và điểm đối xứng:

Bài toán

Phương pháp

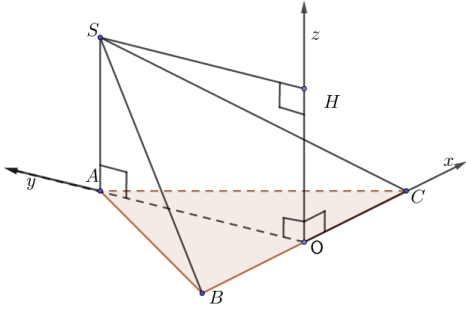
<p>8.1. Tìm hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng (P).</p>	<p>❖ Gọi d là đường thẳng $\left\{ \begin{array}{l} \text{qua } A \\ \perp (P) \end{array} \right. \rightarrow$ Viết pt tham số của d với VTCP của d cũng là VTPT của (P). ❖ Gọi $H = d \cap (P)$. Thay pt tham số của d vào pt mp (P) ta tìm được tọa độ H.</p>		
<p>8.2. Tìm điểm A' đối xứng với A qua (P).</p>	<p>❖ Ta có H là trung điểm $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \\ z_{A'} = 2z_H - z_A \end{cases}$</p>		
<p>8.3. Tìm hình chiếu của điểm A trên đường thẳng d.</p>	<p>Cách 1</p>	<p>❖ Gọi H (theo t) (dựa vào pt tham số của d). ❖ $AH \perp d \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \rightarrow$ Tìm được $t = \dots \rightarrow$ Tọa độ H.</p>	
<p>8.4. Tìm điểm A' đối xứng với A qua đường thẳng d.</p>	<p>Cách 2</p>	<p>❖ Gọi $(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{qua } A \\ (P) \perp d \end{array} \right. \rightarrow$ Viết pt mp (P). ❖ Gọi $H = d \cap (P)$. Thay pt tham số của d vào pt mp (P) ta tìm được tọa độ H.</p>	
<p>8.5. Viết phương trình đường thẳng d' là hình chiếu của đường thẳng d trên mp (P).</p>	<p>Trường hợp 1: d song song mp (P).</p>	<p>❖ Lập phương trình mp (Q) biết (Q) chứa d và $(Q) \perp (P)$: <input type="checkbox"/> (Q) qua điểm $A \in d$. <input type="checkbox"/> (Q) có VTPT $\vec{n}_Q = [\vec{u}_d, \vec{n}_P]$.</p>	
<p>Trường hợp 2: d cắt mp (P) tại một điểm.</p>	<p>❖ Lập phương trình d' là giao tuyến hai mp (P) và (Q): <input type="checkbox"/> Chọn hai điểm M, N thuộc d' bằng cách thay $x = 0 \xrightarrow{Tim} y, z$ và thay $y = 0 \xrightarrow{Tim} x, z$ (đối với hệ hai pt $(P), (Q)$). <input type="checkbox"/> Viết pt d qua M, N.</p>		

XIV. GẮN TỌA ĐỘ VÀO HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

1. GẮN TỌA ĐỘ ĐỐI VỚI HÌNH CHÓP

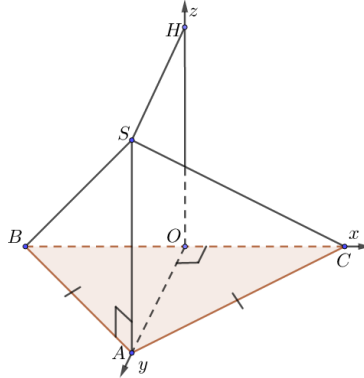
1.1. Hình chóp có cạnh bên (SA) vuông góc với mặt đáy:

Đáy là tam giác đều



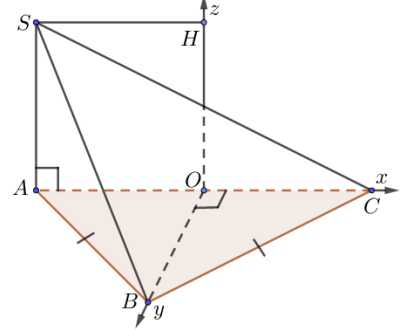
- Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $AB = a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:
 $O(0;0;0)$, $A\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$, $B\left(-\frac{1}{2}; 0; 0\right)$,
 $C\left(\frac{1}{2}; 0; 0\right)$, $S\left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; OH\right)$.

Đáy là tam giác cân tại A



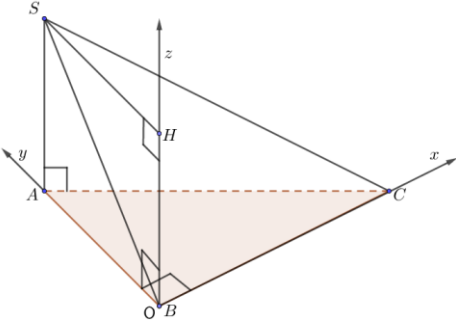
- Gọi O là trung điểm BC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm là:
 $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$, $B(-OB;0;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OA;OH\right)$.

Đáy là tam giác cân tại B



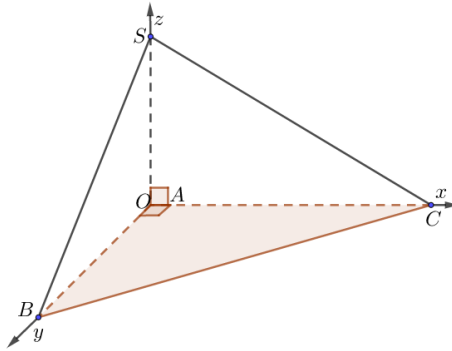
- Gọi O là trung điểm AC . Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,
 $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;OH\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại B



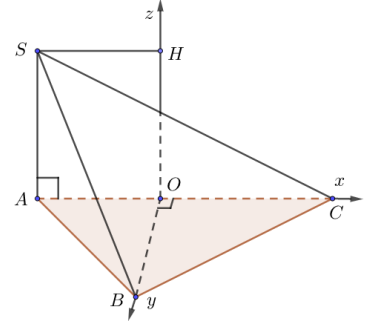
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $B \equiv O(0;0;0)$,
 $A(0;AB;0)$, $C(BC;0;0)$,
 $S\left(0;AB;BH\right)$.

Đáy là tam giác vuông tại A



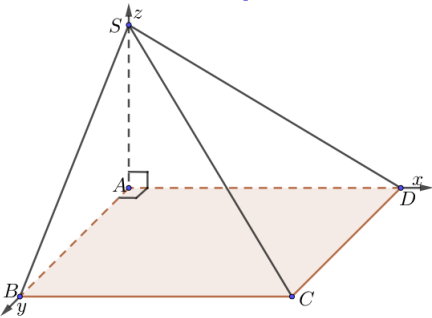
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0;OB;0)$, $C(AC;0;0)$,
 $S(0;0;SA)$.

Đáy là tam giác thường



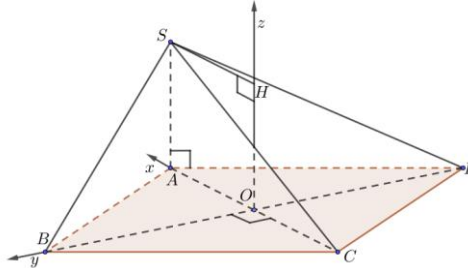
- Dựng đường cao BO của $\triangle ABC$. Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ các điểm: $O(0;0;0)$,
 $A(-OA;0;0)$, $B(0;OB;0)$,
 $C(OC;0;0)$, $S\left(-OA;0;OH\right)$.

Đáy là hình vuông, hình chữ nhật



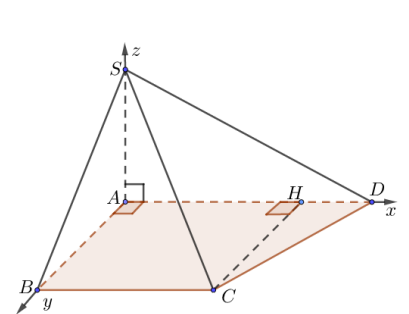
- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$, $B(0;AB;0)$,
 $C(AD;AB;0)$, $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

Đáy là hình thoi



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $O(0;0;0)$, $A(OA;0;0)$,
 $B(0;OB;0)$, $C(-OC;0;0)$,
 $D(0;-OD;0)$, $S\left(OA;0;OH\right)$.

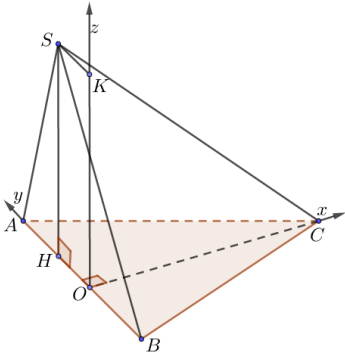
Đáy là hình thang vuông



- Chọn hệ trục như hình vẽ, $a = 1$.
- Tọa độ $A \equiv O(0;0;0)$,
 $B(0;AB;0)$, $C(AH;AB;0)$,
 $D(AD;0;0)$, $S(0;0;SA)$.

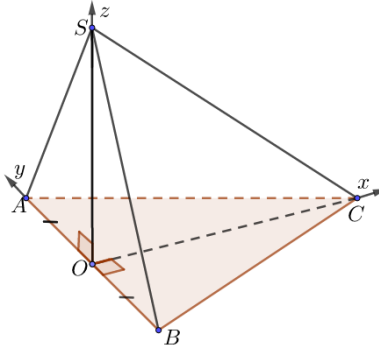
1.2. Hình chóp có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy

Đáy là tam giác, mặt bên là tam giác thường



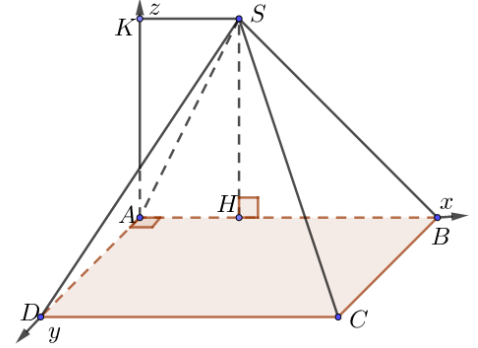
- Vẽ đường cao CO trong ΔABC . Chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S\left(0;OH;OK\right)$
 $=SH$

Đáy là tam giác cân tại C (hoặc đều), mặt bên là tam giác cân tại S (hoặc đều)



- Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ trục như hình, $a = 1$.
- Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;OA;0)$,
 $B(0;-OB;0)$, $C(OC;0;0)$, $S(0;0;SO)$

Đáy là hình vuông-hình chữ nhật



- Dựng hệ trục như hình, chọn $a = 1$.
- Ta có: $A \equiv O(0;0;0)$, $B(AB;0;0)$
 $C(AB;AD;0)$, $D(0;AD;0)$, $S\left(\begin{matrix} AH;0;AK \\ =SH \end{matrix}\right)$

1.3. Hình chóp đều

Hình chóp tam giác đều

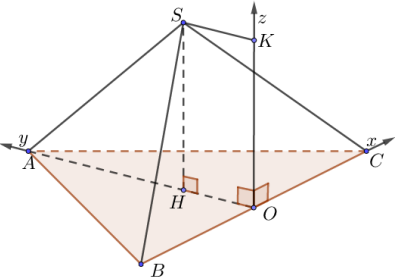
Gọi O là trung điểm một cạnh đáy. Dựng hệ trục như hình vẽ và $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$O(0;0;0), A\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{2}; 0\right), B\left(-\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

$$C\left(\frac{BC}{2}; 0; 0\right),$$

$$S\left(0; \frac{AB\sqrt{3}}{6}; OK\right).$$

$=OH$ $=SH$



Hình chóp tứ giác đều

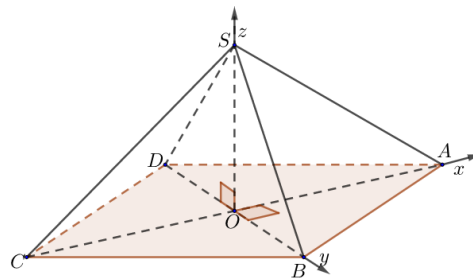
Chọn hệ trục như hình với $a = 1$. Tọa độ điểm: $O(0;0;0)$,

$$A\left(\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right),$$

$$D\left(0; -\frac{AB\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

$$S(0;0;SO).$$

$=OA$ $=OB$ $=OA$ $=OB$



2. Gắn tọa độ đối với hình lăng trụ

2.1. Lăng trụ đứng

Hình lập phương, hình hộp chữ nhật

Dựng hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm:

$$A \equiv O(0;0;0),$$

$$B(0;AB;0),$$

$$C(AD;AB;0),$$

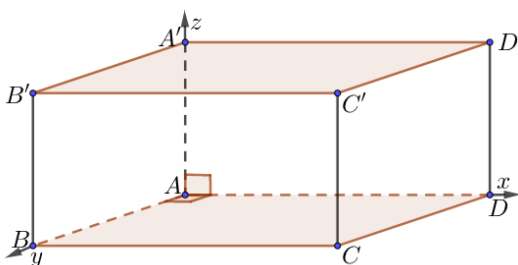
$$D(AD;0;0),$$

$$A'(0;0;AA'),$$

$$B'(0;AB;AA'),$$

$$C'(AD;AB;AA'),$$

$$D'(AD;0;AA').$$



Lăng trụ đứng đáy là hình thoi

Gọi O là tâm hình thoi đáy, ta dựng hệ trục như hình với

$$O(0;0;0),$$

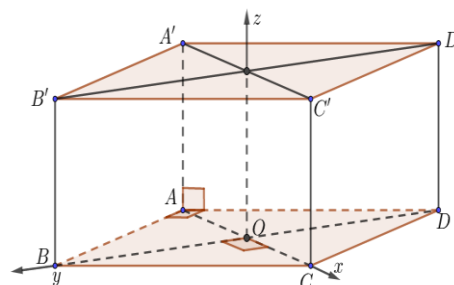
$$A(-OA;0;0),$$

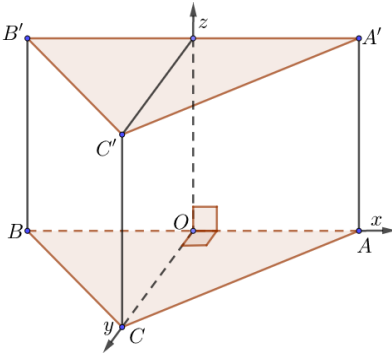
$$B(0;OB;0),$$

$$C(OC;0;0),$$

$$D(0;-OD;0),$$

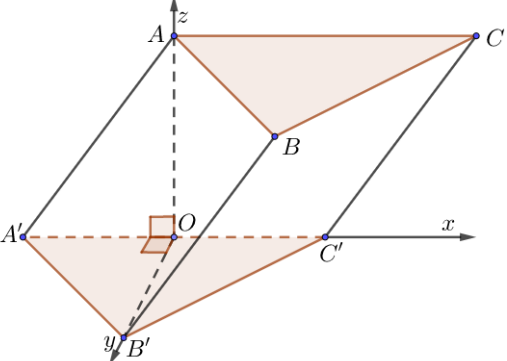
$$A'(-OA;0;AA'),$$



 <p>Lăng trụ tam giác đều Gọi O là trung điểm một cạnh đáy, chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Ta có:</p> <p>$O(0;0;0), A\left(\frac{AB}{2};0;0\right),$ $B\left(-\frac{AB}{2};0;0\right), C(0;OC;0),$ $A'(OA;0;AA'),$ $B'\left(-\frac{AB}{2};0;BB'\right), C'(0;OC;CC').$</p>	<p>$B'(0;OB;AA'), C'(OC;0;CC'), D'(0;-OD;DD')$</p> <p>Lăng trụ đứng có đáy tam giác thường Vẽ đường cao CO trong tam giác ABC và chọn hệ trục như hình vẽ với $a = 1$. Tọa độ điểm là: $O(0;0;0), A(OA;0;0),$ $B(-OB;0;0),$ $C(0;OC;0),$ $A'(OA;0;AA'),$ $B'(-OB;0;BB'), C'(0;OC;CC').$</p>
--	--

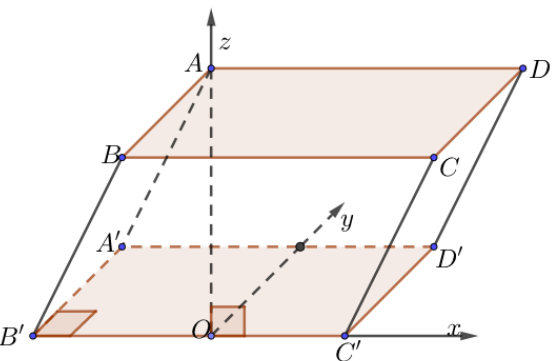
2.2. Lăng trụ nghiêng:

Lăng trụ nghiêng có đáy là tam giác đều, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đối diện là trung điểm một cạnh tam giác đáy



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

Lăng trụ nghiêng có đáy là hình vuông hoặc hình chữ nhật, hình chiếu của một đỉnh là một điểm thuộc cạnh đáy không chứa đỉnh đó



- Dựng hệ trục như hình vẽ, ta dễ dàng xác định được các điểm O, A', B', C', D', A .
- Tìm tọa độ các điểm còn lại thông qua hệ thức vector bằng nhau: $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$.